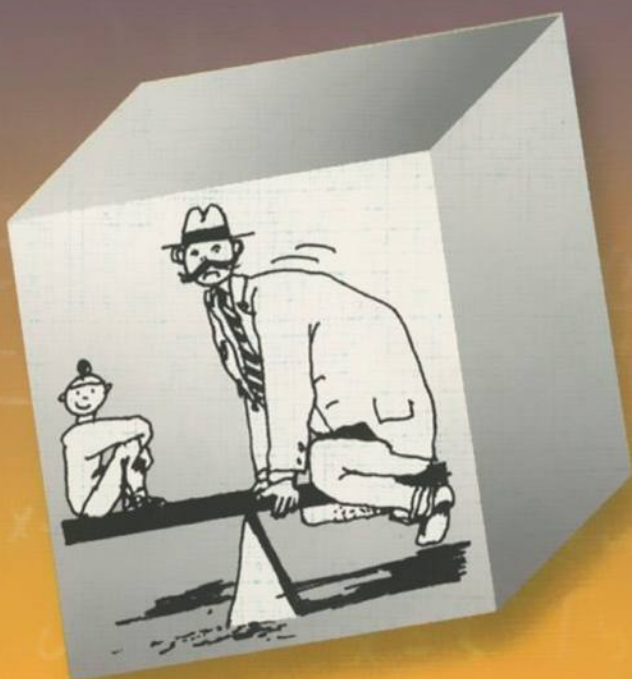


А.Х. Шахмейстер

ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА



Практикум
Тренинг
Контроль

А. Х. Шахмейстер

Дробно- рациональные неравенства

ПОСОБИЕ ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ,
АБИТУРИЕНТОВ И УЧИТЕЛЕЙ

Под общей редакцией
заслуженного учителя РФ Б. Г. Зива



С.-Петербург
Москва
2008

УДК 373.167.1:512

ББК 22.141я71.6

Редакторы:

Кандидат физ.-мат. наук, доцент РГПУ им. Герцена,
заслуженный учитель РФ С. Е. Рукшин.

Кандидат пед. наук, доцент кафедры математики МОО
А. В. Семенов.

Рецензенты:

Доктор физ.-мат. наук, профессор МГУ Г. Ю. Ризниченко,
заслуженный учитель РФ Т. И. Куреин,
заслуженный учитель РФ Е. Б. Лившиц.

Шахмейстер А. Х.

- Ш32** Дробно-рациональные неравенства. — 3-е изд., исправленное и дополненное — М.: Издательство МЦНМО : СПб.: «Петроглиф»: «Виктория плюс», 2008. — 248 с.: илл. — ISBN 978-5-94057-382-1, ISBN 978-5-98712-020-0, ISBN 978-5-91281-044-2.

Данное пособие предназначено для углубленного изучения школьного курса математики, содержит большое количество разноуровневого тренировочного материала. В книге представлена программа для проведения элективных курсов в профильных и предпрофильных классах. Пособие адресовано широкому кругу учащихся, абитуриентов, студентов педагогических вузов, учителей.

ISBN 978-5-94057-382-1 (Издательство МЦНМО)

ISBN 978-5-98712-020-0 (ООО «Петроглиф»)

ISBN 978-5-91281-044-2 (ООО «Виктория плюс»)

УДК 373.167.1:512

ББК 22.141я71.6

© Шахмейстер А. Х., 2008

© Куликов Ю. Н., обложка, 2008

© ООО «Петроглиф», 2008

Предисловие

Предлагаемая серия книг адресована широкому кругу учащихся средних школ, классов и школ с углубленным изучением математики, абитуриентов, студентов педагогических вузов, учителей.

Книги можно использовать как самостоятельные учебные пособия (самоучители), как задачки по данной теме и как сборники дидактических материалов. Каждая книга снабжена программой элективного курса.

Для учащихся можно предложить следующую схему работы: прочитав вступление и рассмотрев примеры решения, самостоятельно решать тренировочные работы, затем посмотреть решения и, осмыслив их, попробовать решить проверочные работы, проверяя их решения по книге и т.д.

Книги полностью подходят для самостоятельного овладения той или иной темой и рассчитаны на последовательное обучение от начального уровня до уровня, необходимого абитуриентам.

Для учителей эти книги предоставляют широкий выбор приемов и методов работы:

Это могут быть задания учащимся для самостоятельной работы с последующим контролем учителя.

Возможно использование книги как задачника для работы в классе и для домашних заданий.

Эти пособия идеально подходят в качестве материала для повторения параллельно изучению других тем в школе.

Подбор материала позволяет существенно дифференцировать уровень требований к учащимся при проведении контрольных и зачетных работ.

Уровень сложности и объем материала в книгах серии, безусловно, избыточен, и учитель должен сам выбирать сложность и объем материала в соответствии с возможностями учащихся и задачами, стоящими перед ними.

А. Х. Шахмейстер

**Программа элективного курса для учащихся 8-11 классов
(25 уроков).**

№№ уроков	Название темы В скобках указаны номера заданий
1 – 4	Решение неравенств методом интервалов (стр. 5 – 30) Практикум 1 (примеры по выбору учителя, с учетом возможностей учащихся). Тренировочная работа 1 (1, 4, 5, 10). Тренировочная работа 2 (5, 7, 8, 11).
5 – 7	Системы неравенств (стр. 32 – 45) Практикум 2. Тренировочная работа 3 (2, 6, 10).
8 – 10	Нахождение области определения (стр. 46 – 52) Практикум 3. Тренировочная работа 4 (2, 3, 6, 8).
11 – 12	Решение более сложных неравенств (стр. 53 – 60) Тренировочная работа 5 (2, 4, 9, 10).
13 – 16	Модульные неравенства (стр. 61 – 91) Практикум 4. Тренировочная работа 6 (1, 4, 8). Тренировочная работа 7 (1, 4, 6, 9).
17 – 25	Различные неравенства (стр. 94 – 128) Подготовительная карточка 1 (1, 3, 4, 6). Подготовительная карточка 2 (1, 3, 4). Подготовительная карточка 3 (3, 6). Подготовительная карточка 4 (1, 4, 5). Подготовительная карточка 5 (4, 6). Зачетная карточка 7 (2, 6). Зачетная карточка 8 (1, 6).

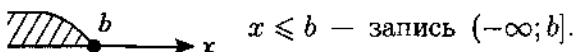
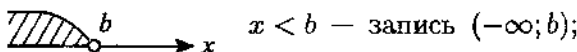
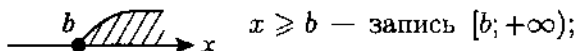
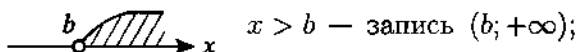
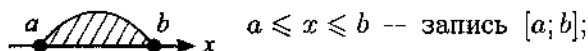
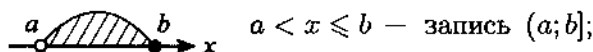
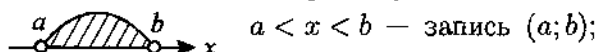
Программа подготовлена, составлена и апробирована на практике заслуженным учителем РФ Е. Б. Лившицем.

1

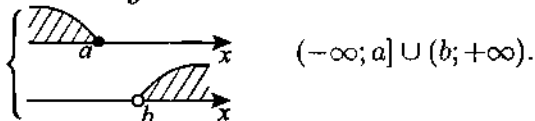
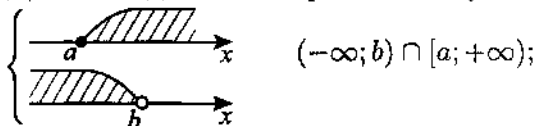
Решение неравенств методом интервалов

Обозначения

Введем обозначения промежутков:



Для наглядности автором используется обозначение:

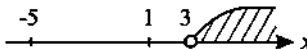


В чем заключается метод интервалов

Пусть $y = f(x)$ представлена в виде произведения каких-то сомножителей $f(x) = (x-3)(x+5)(x-1)$. Выясним, при каких значениях x функция имеет положительные значения, а при каких — отрицательные.

Для этого прежде всего выясним, когда $f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3, \\ x = -5, \\ x = 1. \end{cases}$

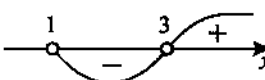
Обозначим на числовой оси корни¹ этой функции. Эти числа разбили числовую ось на несколько интервалов. Рассмотрим знаки функции на каждом из этих интервалов.

а) $x > 3$ 

$$\begin{cases} x-3 > 0, \\ x+5 > 0, \\ x-1 > 0. \end{cases} \Rightarrow (x-3)(x+5)(x-1) > 0.$$

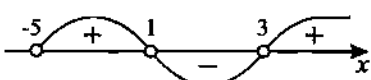
Отсюда $f(x) > 0$, следовательно, на этом интервале знак значений функции $+$. ($f(3) = 0$)



б) $1 < x < 3$ 

$$\begin{cases} x-3 < 0, \\ x-1 > 0, \\ x+5 > 0. \end{cases} \Rightarrow (x-3)(x-1)(x+5) < 0,$$

тогда $f(x) < 0$.

в) $-5 < x < 1$ 

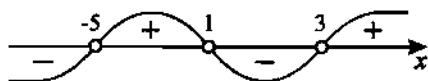
$$\begin{cases} x-3 < 0, \\ x-1 < 0, \\ x+5 > 0 \end{cases} \Rightarrow (x-3)(x-1)(x+5) > 0,$$

тогда $f(x) > 0$.

¹ Под корнями функции будем понимать нули функции

Любопытно отметить, что при прохождении корней функции, функция поменяла знак на противоположный и в пункте б), и в пункте в).

г) $x < -5$



Тогда
$$\begin{cases} x - 3 < 0, \\ x - 1 < 0, \\ x + 5 < 0. \end{cases} \Rightarrow f(x) < 0$$

и знак функции снова изменился на противоположный.

Итак, простейшие наблюдения позволяют сделать вывод:

При прохождении корня функция меняет свой знак на противоположный.

Покажем, как, используя этот факт, можно довольно быстро и экономно решать довольно сложные неравенства.

Рассмотрим $f(x) = (x + 2,5)(x - 2)(x - 5)(x + 1)$.

Необходимо выяснить, например, когда $f(x) < 0$. Можно подробно рассмотреть каждый интервал и знак функции на нем, как это было сделано в предыдущем примере. Но можно иначе. Заметим, что все коэффициенты в этом разложении при x положительны (в данном случае равны 1). Это значит, что на самом правом интервале (т.е. больше большего корня) знак функции всегда положительный, и учитывая, что при прохождении корня функции, знаки функции меняются на противоположные, можно сформулировать (интуитивно понятное) мнемоническое правило.

Для решения неравенства необходимо:

- а) разложить функцию на множители в каноническом виде (т.е. все коэффициенты при x должны быть положительными);
- б) найти все корни функции и отметить их на числовой оси в порядке возрастания;
- в) распределение знаков функции начинается всегда справа сверху (в виде змейки) и чередуется при прохождении корней функции;

- г) если требуется знать, когда значения функции положительны, т.е. $f(x) > 0$, то записываются интервалы, описываемые змейкой над осью. А если требуется знать, когда значения функции отрицательны, т.е. $f(x) < 0$, то интервалы, описываемые змейкой под осью.

Найдем интервалы, для которых

$$(x + 2,5)(x - 2)(x - 5)(x + 1) < 0.$$

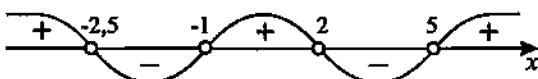
Очевидно, что вид канонический (т.е. все коэффициенты положительны). Найдем корни, т.е.

$$\begin{cases} x + 2,5 = 0 \\ x - 2 = 0, \\ x - 5 = 0, \\ x + 1 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x = -2,5 \\ x = 2, \\ x = 5, \\ x = -1. \end{cases}$$

Отметим их на числовой оси,



а затем проведем змейку, начиная ее справа, сверху.



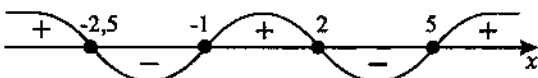
Так как $f(x) < 0$, то рассмотрим интервалы под числовой осью, описываемой змейкой, т.е. $-2,5 < x < -1$; $2 < x < 5$.

Примечание. Неравенство строгое, поэтому корни на оси отмечаются кружочками, не заштрихованными внутри. Ответ можно записать в виде интервалов: $(-2,5; -1) \cup (2; 5)$.

Выясним, на каких промежутках

$$(x + 2,5)(x - 2)(x - 5)(x + 1) \geq 0.$$

Рассуждая аналогично, получим



Теперь будем рассматривать интервалы над осью, включая сами корни, тогда все значения x из $[-2,5; -1] \cup [2; 5]$ есть решение неравенства.

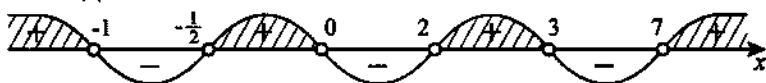
Практикум 1

(Примеры использования метода интервалов)

Рассмотрим на различных примерах реализацию этой идеи и необходимое уточнение в ряде случаев.

1. $(x+1)(x-3)(2x+1)(x-7)(x-2)x > 0$.

Корни функции легко найти устно. Знак функции ($f(x) > 0$) положительный, тогда берем интервалы, описываемые змейкой над осью, и заштриховываем их для наглядности.

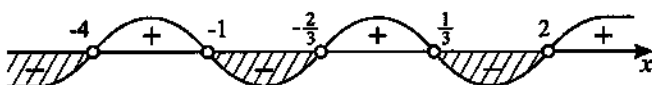


$x < -1$; $-\frac{1}{2} < x < 0$; $2 < x < 3$; $x > 7$, записываем ответ в виде интервалов.

Ответ: $(-\infty; -1) \cup \left(-\frac{1}{2}; 0\right) \cup (2; 3) \cup (7; +\infty)$.

2. $\left(x + \frac{2}{3}\right)(3x-1)(x+4)(x-2)(x+1) < 0$.

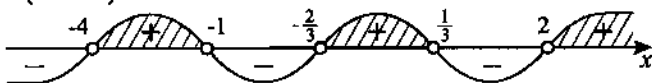
Знак функции ($f(x) < 0$) отрицательный. Берем интервалы, описываемые змейкой под числовой осью, и заштриховываем.



$x < -4$; $-1 < x < -\frac{2}{3}$; $\frac{1}{3} < x < 2$.

Ответ: $(-\infty; -4) \cup \left(-1; -\frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}; 2\right)$.

3. $\left(x + \frac{2}{3}\right)(3x-1)(x+4)(x-2)(x+1) > 0$.



$-4 < x < -1$; $-\frac{2}{3} < x < \frac{1}{3}$; $x > 2$.

Ответ: $(-4; -1) \cup \left(-\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right) \cup (2; +\infty)$.

4. $(x^2 - 3x - 4)x > 0$.

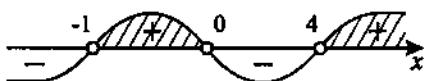
Для применения метода интервалов необходимо выражение в левой части разложить на множители.

Известно, что $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, где x_1 и x_2 — корни.

Решим $x^2 - 3x - 4 = 0$.

$$\begin{cases} x = 4 \\ x = -1, \end{cases} \text{ тогда } x^2 - 3x - 4 = (x - 4)(x + 1).$$

$$(x - 4)(x + 1)x > 0.$$



Ответ: $(-1; 0) \cup (4; +\infty)$.

5. $(x^2 - 9)(x^2 - 4) < 0$.

$$(x + 3)(x - 3)(x + 2)(x - 2) < 0.$$



Ответ: $(-3; -2) \cup (2; 3)$.

6. $(x^2 + 5x - 6)(x^2 + 2x - 8) > 0$.

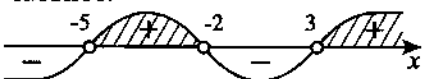
Так как $x^2 + 5x - 6 = (x + 6)(x - 1)$ и $x^2 + 2x - 8 = (x + 4)(x - 2)$, $(x + 6)(x - 1)(x + 4)(x - 2) > 0$.



Ответ: $(-\infty; -6) \cup (-4; 1) \cup (2; +\infty)$.

7. $\frac{(x + 5)(x - 3)}{x + 2} > 0$.

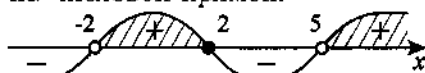
Интересно, что метод годится и для дробно-рациональных неравенств. Действительно, ведь чередование знаков не зависит от того, произведение сомножителей дано или их частное.



Ответ: $(-5; -2) \cup (3; +\infty)$.

$$8. \frac{x-2}{(x+2)(x-5)} \geq 0.$$

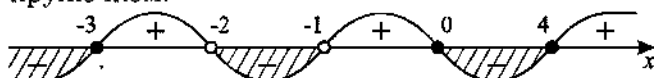
В этом примере следующая особенность: корни числителя являются решением неравенства, т.к. неравенство не строгое, а значения корней знаменателя всегда исключаются. Примечание: если значение корня есть решение неравенства, то оно обозначается сплошным кружочком на числовой прямой.



Ответ: $(-2; 2] \cup (5; +\infty)$.

$$9. \frac{(x+3)(x-4)x}{(x+1)(x+2)} \leq 0.$$

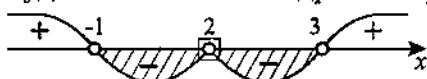
Не забываем, что в нестрогих неравенствах корни числителя включены в решение и обозначаются сплошным кружочком.



Ответ: $(-\infty; -3] \cup (-2; -1) \cup [0; 4]$.

$$10. (x-2)^2(x+1)(x-3) < 0.$$

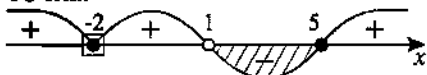
В этом примере корень выражения $x=2$ двойной кратности, а значит, выражение при прохождении этого корня дважды меняет знак на противоположный (такой корень будем обозначать квадратиком).



Ответ: $(-1; 2) \cup (2; 3)$.

$$11. \frac{(x-5)(x+2)^2}{x-1} \leq 0.$$

Очень любопытно, что корень $x=-2$ есть решение неравенства, т.е. в данном случае $x=-2$ как бы приклеенная точка.

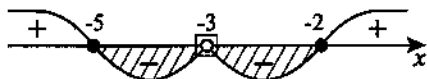


Ответ: $(1; 5] \cup \{-2\}$.

$$12. \frac{x^2 + 7x + 10}{(x + 3)^2} \leq 0.$$

$$x^2 + 7x + 10 = 0; \quad \begin{cases} x = -2 \\ x = -5; \end{cases}$$

$$x^2 + 7x + 10 = (x + 2)(x + 5). \quad \frac{(x + 2)(x + 5)}{(x + 3)^2} \leq 0.$$



Ответ: $[-5; -3) \cup (-3; -2]$.

$$13. \frac{(x^2 + 2x - 3)(x^2 - 16)}{(x^2 - 1)(x^2 - 9)} \geq 0.$$

$$x^2 + 2x - 3 = 0; \quad \begin{cases} x = -3 \\ x = 1; \end{cases} \quad x^2 + 2x - 3 = (x + 3)(x - 1).$$

$$\frac{(x + 3)(x - 1)(x + 4)(x - 4)}{(x + 1)(x - 1)(x + 3)(x - 3)} \geq 0.$$

Отметим, что если в нестрогом неравенстве $x = a$ есть корень в разложении числителя и знаменателя, то он обязательно исключается из решения, т.е. обозначается полым кружочком. В данном случае он еще четной кратности.



Ответ: $(-\infty; -4] \cup (-1; 1) \cup (1; 3) \cup [4; +\infty)$.

$$14. \frac{4 - x^2}{(x + 7)x} \leq 0.$$

Этот пример интересен тем, что не все коэффициенты при x положительны, а значит в чистом виде методом пользоваться нельзя. Какой же выход? Можно решать стандартным способом, умножив обе части неравенства на (-1) , не забыв при этом поменять смысл² неравенства на противоположный. Приведем к каноническому виду:

$$\frac{(2 - x)(2 + x)}{(x + 7)x} \leq 0 \quad \times (-1) \Leftrightarrow \frac{(x - 2)(2 + x)}{(x + 7)x} \geq 0.$$

² Под смыслом неравенства следует понимать знак неравенства



Ответ: $(-\infty; -7) \cup [-2; 0] \cup [2; +\infty)$.

Но можно иначе, не меняя смысл неравенства. Действительно, $\frac{(2-x)(2+x)}{(x+7)x} \leq 0$. Подумаем, что значит "неканонический" вид. Это значит на самом правом интервале функция принимает отрицательные значения, а это значит, что распределение знаков нужно начинать справа снизу.

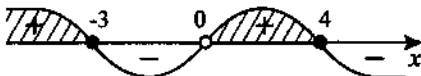


Ответ тот же: $(-\infty; -7) \cup [-2; 0] \cup [2; +\infty)$.

15. $\frac{12+x-x^2}{x} \geq 0$.

$$12+x-x^2 = -(x+3)(x-4).$$

$$\frac{-(x+3)(x-4)}{x} \geq 0 \text{ — неканонический вид.}$$



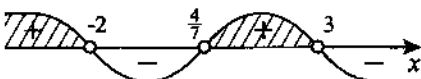
Ответ: $(-\infty; -3] \cup (0; 4]$.

16. $\frac{(4-7x)(x^2+2)}{(x-3)(x+2)} > 0$.

$x^2+2 > 0$ при любых x , значит, данное неравенство равносильно неравенству $\frac{4-7x}{(x-3)(x+2)} > 0$, так как можно

обе части неравенства умножить на $\frac{1}{x^2+2}$ и получить

неравенство того же смысла $\frac{4-7x}{(x-3)(x+2)} > 0$.

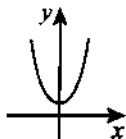


Ответ: $(-\infty; -2) \cup \left(\frac{4}{7}; 3\right)$.

$$17. \frac{(x^2 + 3x + 7)x}{(3x - 1)(x + 4)} \geq 0.$$

Напоминаем, что если $y = ax^2 + bx + c$ такое, что $\begin{cases} a > 0, \\ D < 0, \end{cases}$

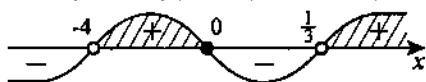
то $y > 0$ при всех x .



Значит $ax^2 + bx + c > 0$ для любых x .

В данном случае $D = 3^2 - 28 < 0$, т.е. $\begin{cases} a = 1 > 0, \\ D < 0. \end{cases}$

Значит, $x^2 + 3x + 7 > 0$ для любых x , откуда следует, что $\frac{(x^2 + 3x + 7)x}{(3x - 1)(x + 4)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x}{(3x - 1)(x + 4)} \geq 0$.



Ответ: $(-4; 0] \cup \left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$.

$$18. \frac{2 + 3x - 2x^2}{(x^4 - 16)x} \geq 0.$$

$$2x^2 - 3x - 2 = 0;$$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 16}}{4}; \quad x_1 = 2, \quad x_2 = -\frac{1}{2};$$

$$-2x^2 + 3x + 2 = -2(x - 2) \left(x + \frac{1}{2}\right).$$

$$\frac{-2(x - 2) \left(x + \frac{1}{2}\right)}{(x^2 - 4)(x^2 + 4)x} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-2(x - 2) \left(x + \frac{1}{2}\right)}{(x + 2)(x - 2)x} \geq 0,$$

так как $x^2 + 4 > 0$ для любых x .

Вид неравенства неканонический и $x = 2$ — корень четной кратности.



Ответ: $(-\infty; -2) \cup \left[-\frac{1}{2}; 0\right)$.

$$19. \frac{x^6 - 1}{x^6 + 1} \geq 0. \quad \frac{(x^2)^3 - 1}{(x^2)^3 + 1} \geq 0;$$

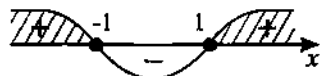
$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2);$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2);$$

$$\frac{(x^2 - 1)(x^4 + x^2 + 1)}{(x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1)} \geq 0,$$

так как $x^4 + x^2 + 1 > 0$ при всех x ($x^4 \geq 0$; $x^2 \geq 0$; $1 > 0$),
 $x^2 + 1 > 0$ при всех x , $x^4 - x^2 + 1 > 0$ при всех x ($x^2 = t$,
 тогда $t^2 - t + 1 > 0$ для любых t) так как $\begin{cases} a = 1 > 0, \\ D = -3 < 0, \end{cases}$
 значит, данное неравенство равносильно $x^2 - 1 \geq 0$.

$$(x - 1)(x + 1) \geq 0.$$



Ответ: $(-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$.

$$20. \frac{21}{x-1} > 4.$$

Чтобы решать неравенства такого типа, надо перенести все члены неравенства в одну сторону, привести к общему знаменателю, разложить на множители числитель и знаменатель получившегося дробно-рационального выражения. После чего можно пользоваться методом интервалов.

$$\frac{21}{x-1} - 4 > 0; \quad \frac{21 - 4(x-1)}{x-1} > 0; \quad \frac{21 - 4x + 4}{x-1} > 0;$$

$$\frac{25 - 4x}{x-1} > 0.$$

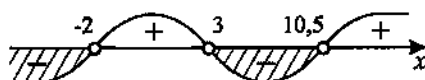


Ответ: $\left(1; 6\frac{1}{4}\right)$.

$$21. \frac{5}{x+2} < \frac{3}{x-3}.$$

$$\frac{5}{x+2} - \frac{3}{x-3} < 0; \quad \frac{5(x-3) - 3(x+2)}{(x+2)(x-3)} < 0;$$

$$\frac{5x - 15 - 3x - 6}{(x+2)(x-3)} < 0; \quad \frac{2x - 21}{(x+2)(x-3)} < 0.$$



Ответ: $(-\infty; -2) \cup (3; 10,5)$.

$$22. \frac{2}{x^2 - 3x - 4} \geq \frac{3}{x^2 + x - 6}.$$

$$\frac{2}{x^2 - 3x - 4} - \frac{3}{x^2 + x - 6} \geq 0.$$

$$x^2 - 3x - 4 = 0 \quad \begin{cases} x = 4 \\ x = -1; \end{cases} \quad x^2 - 3x - 4 = (x - 4)(x + 1);$$

$$x^2 + x - 6 = 0 \quad \begin{cases} x = -3 \\ x = 2; \end{cases} \quad x^2 + x - 6 = (x + 3)(x - 2).$$

$$\frac{2(x^2 + x - 6) - 3(x^2 - 3x - 4)}{(x^2 - 3x - 4)(x^2 + x - 6)} \geq 0;$$

$$\frac{2x^2 + 2x - 12 - 3x^2 + 9x + 12}{(x - 4)(x + 1)(x + 3)(x - 2)} \geq 0.$$

$$\frac{-x^2 + 11x}{(x - 4)(x + 1)(x + 3)(x - 2)} \geq 0;$$

$$\frac{-x(x - 11)}{(x - 4)(x + 1)(x + 3)(x - 2)} \geq 0.$$



Ответ: $(-3; -1) \cup [0; 2) \cup (4; 11]$.

$$23. \frac{3 - x}{(x + 2)(x - 1)} \leq \frac{2(3 - x)}{2x^2 - x - 1}.$$

$$(3 - x) \left(\frac{1}{(x + 2)(x - 1)} - \frac{2}{2x^2 - x - 1} \right) \leq 0;$$

$$(3 - x) \frac{2x^2 - x - 1 - 2(x + 2)(x - 1)}{(x + 2)(x - 1)(2x^2 - x - 1)} \leq 0.$$

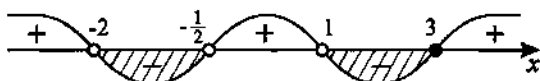
$$\text{Так как } 2x^2 - x - 1 = 2(x - 1) \left(x + \frac{1}{2} \right),$$

$$\frac{(3 - x)(2x^2 - x - 1 - 2x^2 - 2x + 4)}{(x + 2)(x - 1) \cdot 2(x - 1)(x + \frac{1}{2})} \leq 0.$$

$$\frac{(3-x)(3-3x)}{(x+2)(x-1) \cdot 2(x-1)(x+\frac{1}{2})} \leq 0;$$

$$\frac{3(x-3)(x-1)}{2(x+2)(x-1)^2(x+\frac{1}{2})} \leq 0.$$

Отметим, что $x = 1$ — корень нечетной кратности.



Ответ: $\left(-2; -\frac{1}{2}\right) \cup (1; 3]$.

24. $\frac{x^4 - 2x^2 - 8}{x - 3} \leq \frac{x^4 - 16}{x + 3}.$

$$x^4 - 2x^2 - 8 = (x^2 - 4)(x^2 + 2) = (x - 2)(x + 2)(x^2 + 2);$$

$$\frac{(x^2 - 4)(x^2 + 2)}{x - 3} - \frac{(x^2 + 4)(x^2 - 4)}{x + 3} \leq 0;$$

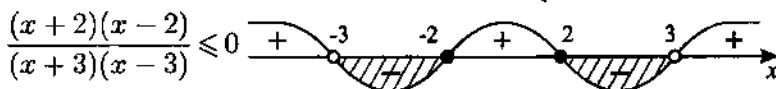
$$(x^2 - 4) \left(\frac{x^2 + 2}{x - 3} - \frac{x^2 + 4}{x + 3} \right) \leq 0;$$

$$(x + 2)(x - 2) \cdot \frac{(x^2 + 2)(x + 3) - (x - 3)(x^2 + 4)}{(x - 3)(x + 3)} \leq 0;$$

$$\frac{(x + 2)(x - 2)(x^3 + 3x^2 + 2x + 6 - x^3 + 3x^2 - 4x + 12)}{(x - 3)(x + 3)} \leq 0;$$

$$\frac{(x + 2)(x - 2)(6x^2 - 2x + 18)}{(x - 3)(x + 3)} \leq 0.$$

$$6x^2 - 2x + 18 > 0 \text{ при всех } x, \text{ так как } \begin{cases} a = 6 > 0, \\ \frac{D}{4} = -107 < 0. \end{cases}$$



Ответ: $(-3; -2] \cup [2; 3).$

25. $\frac{2}{x^3} - \frac{3}{x^2} > \frac{5}{x}.$

$$\frac{2}{x^3} - \frac{3}{x^2} - \frac{5}{x} > 0; \quad \frac{2 - 3x - 5x^2}{x^3} > 0;$$

$$2 - 3x - 5x^2 = -5(x+1) \left(x - \frac{2}{5} \right), \text{ так как } 5x^2 + 3x - 2 = 0;$$

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+40}}{10}; \quad \begin{cases} x = -1 \\ x = \frac{2}{5} \end{cases}$$

$$\frac{-5(x+1) \left(x - \frac{2}{5} \right)}{x^3} > 0$$


$$\text{Ответ: } (-\infty; -1) \cup \left(0; \frac{2}{5} \right).$$

$$26. \frac{2x^2 - 3x + 1}{x - 1} \leq \frac{4}{2x - 1}.$$

Приводить к общему знаменателю сразу нерационально, так как получим в числителе многочлен третьей степени, который разложить на множители достаточно трудно. Поэтому попробуем вначале упростить (сократить) левую часть неравенства.

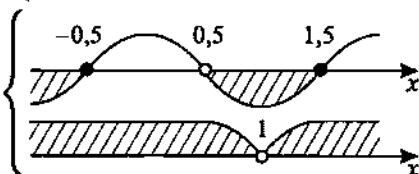
$$2x^2 - 3x + 1 = (2x - 1)(x - 1), \text{ так как}$$

$$2x^2 - 3x + 1 = 0; \quad x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{4} = \frac{3 \pm 1}{4}; \quad \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{тогда } \frac{(2x-1)(x-1)}{x-1} \leq \frac{4}{2x-1}, \text{ т. е.}$$

$$\begin{cases} 2x - 1 \leq \frac{4}{2x - 1}, \\ x \neq 1; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{(2x-1)^2 - 4}{2x-1} \leq 0, \\ x \neq 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{(2x-1+2)(2x-1-2)}{2x-1} \leq 0, \\ x \neq 1; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{(2x+1)(2x-3)}{2x-1} \leq 0, \\ x \neq 1. \end{cases}$$



$$\text{Ответ: } (-\infty; -0,5] \cup (0,5; 1) \cup (1; 1,5].$$

$$27. \frac{x^2 - 1}{3x^4 - 4x^2 + 1} \geq \frac{3x^2 - 1}{9}.$$

По аналогии попробуем вначале упростить левую часть неравенства, предварительно заменив переменную.

Обозначим $x^2 = t$. Тогда неравенство примет вид

$$\frac{t - 1}{3t^2 - 4t + 1} \geq \frac{3t - 1}{9};$$

$3t^2 - 4t + 1 = (3t - 1)(t - 1)$, так как

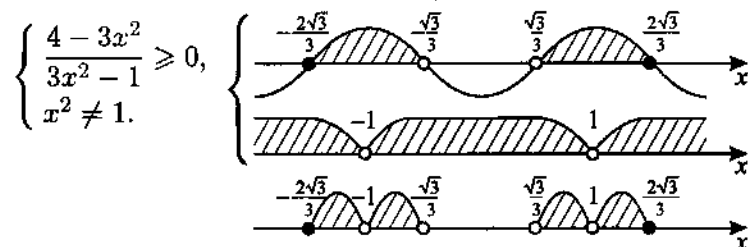
$$3t^2 - 4t + 1 = 0; \quad t_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 3}}{3} = \frac{2 \pm 1}{3}; \quad \begin{cases} t = 1 \\ t = \frac{1}{3} \end{cases},$$

$$\text{тогда } \frac{t - 1}{(3t - 1)(t - 1)} \geq \frac{3t - 1}{9}; \quad \begin{cases} \frac{1}{3t - 1} \geq \frac{3t - 1}{9}, \\ t \neq 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{9 - (3t - 1)^2}{3t - 1} \geq 0, \\ t \neq 1; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{(3 - 3t + 1)(3 + 3t - 1)}{3t - 1} \geq 0, \\ t \neq 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{(4 - 3t)(2 + 3t)}{3t - 1} \geq 0, \\ t \neq 1; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{(4 - 3x^2)(2 + 3x^2)}{3x^2 - 1} \geq 0, \\ x^2 \neq 1. \end{cases}$$

Так как $2 + 3x^2 > 0$ для всех x , то



$$\text{Ответ: } \left[-\frac{2\sqrt{3}}{3}; -1\right) \cup \left(-1; -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{3}}{3}; 1\right) \cup \left(1; \frac{2\sqrt{3}}{3}\right].$$

Проверим, все ли идеи метода интервалов усвоены.

Некоторые итоги

Для того, чтобы использовать метод интервалов для решения неравенств, необходимо:

1. Разложить $f(x)$ на множители;
2. Определить вид разложения функции:
 - а) если вид канонический, то распределение знаков функции начинается всегда справа сверху, и знаки чередуются;
 - б) если вид неканонический, то распределение знаков функции начинается всегда справа снизу, и знаки чередуются, проходя корни функции;
3. Уточнить кратность корней: если есть корни четной кратности, то, проходя через них, функция дважды меняет свой знак на противоположный; если есть корни нечетной кратности, то, проходя через них, функция меняет свой знак на противоположный;
4. Обратит внимание на то, какое дано неравенство, строгое или нет, так как в зависимости от этого на оси абсцисс нужно отметить или незаштрихованные (полые) точки, или заштрихованные точки;
5. Для дробных неравенств не забыть отметить на оси абсцисс корни знаменателя как полые точки;
6. Для нестрогого дробного неравенства при наличии корней в разложении и в числителе, и в знаменателе на оси абсцисс отметить полые точки.

Тренировочная работа 1

Решите неравенства 1–10:

1. $\frac{x+4}{(x+5)x} < 0.$

2. $\frac{4-3x}{(x+2)(x-1)} \geq 0.$

3. $\frac{25-16x^2}{x^2+4x+4} > 0.$

4. $\frac{x^2+3x}{49x^2+70x+25} \leq 0.$

5. $\frac{4x+3}{x+2} > 5.$

6. $\frac{6x-1}{4x+3} \leq \frac{3x-2}{2x-1}.$

7. $\frac{5}{-6x+3} + \frac{6x}{1-2x} \geq 0.$

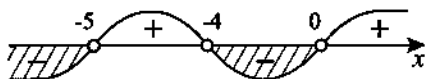
8. $\frac{x^2+7x+8}{(x+1)^2-9} - \frac{3x+7}{3x-6} \leq 0.$

9. $\frac{6}{-4x-x^2} - \frac{2}{x^2-4x} + \frac{x}{x^2-16} \geq 0.$

10. $\left(\frac{x^2+2x+4}{4x^2-1} \cdot \frac{2x^2-x}{-x^3+8} - \frac{2-x}{2x^2+x} \right) : \frac{4}{x^2-2x} \geq \frac{4-x}{x+2x^2}.$

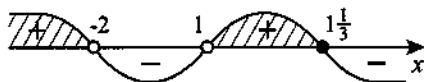
Решение тренировочной работы 1

$$1. \frac{x+4}{(x+5)x} < 0.$$



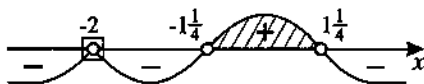
Ответ: $(-\infty; -5) \cup (-4; 0)$.

$$2. \frac{4-3x}{(x+2)(x-1)} \geq 0.$$



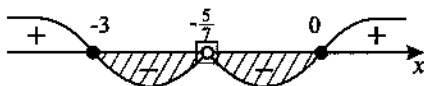
Ответ: $(-\infty; -2) \cup \left(1; 1\frac{1}{3}\right]$.

$$3. \frac{25-16x^2}{x^2+4x+4} > 0. \quad \frac{(5+4x)(5-4x)}{(x+2)^2} > 0.$$



Ответ: $\left(-1\frac{1}{4}; 1\frac{1}{4}\right)$.

$$4. \frac{x^2+3x}{49x^2+70x+25} \leq 0. \quad \frac{x(x+3)}{(7x+5)^2} \leq 0.$$



Ответ: $\left[-3; -\frac{5}{7}\right] \cup \left[-\frac{5}{7}; 0\right]$.

$$5. \frac{4x+3}{x+2} > 5. \quad \frac{4x+3-5(x+2)}{x+2} > 0; \quad \frac{-x-7}{x+2} > 0.$$



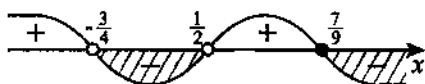
Ответ: $(-7; -2)$.

$$6. \frac{6x-1}{4x+3} \leq \frac{3x-2}{2x-1}. \quad \frac{6x-1}{4x+3} - \frac{3x-2}{2x-1} \leq 0;$$

$$\frac{(6x-1)(2x-1) - (3x-2)(4x+3)}{(4x+3)(2x-1)} \leq 0;$$

$$\frac{12x^2 - 8x + 1 - 12x^2 - x + 6}{(4x + 3)(2x - 1)} \leq 0;$$

$$\frac{7 - 9x}{(4x + 3)(2x - 1)} \leq 0.$$



Ответ: $\left(-\frac{3}{4}; \frac{1}{2}\right) \cup \left[\frac{7}{9}; +\infty\right)$.

7. $\frac{5}{-6x + 3} + \frac{6x}{1 - 2x} \geq 0.$

$$\frac{5}{3(1 - 2x)} + \frac{6x}{1 - 2x} \geq 0; \quad \frac{5 + 18x}{3(1 - 2x)} \geq 0$$



Ответ: $\left[-\frac{5}{18}; \frac{1}{2}\right)$.

8. $\frac{x^2 + 7x + 8}{(x + 1)^2 - 9} - \frac{3x + 7}{3x - 6} \leq 0.$

$$\frac{x^2 + 7x + 8}{(x + 1 + 3)(x + 1 - 3)} - \frac{3x + 7}{3(x - 2)} \leq 0;$$

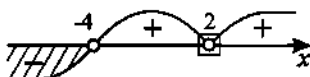
$$\frac{x^2 + 7x + 8}{(x + 4)(x - 2)} - \frac{3x + 7}{3(x - 2)} \leq 0;$$

$$\frac{3(x^2 + 7x + 8) - (3x + 7)(x + 4)}{3(x + 4)(x - 2)} \leq 0;$$

$$\frac{3x^2 + 21x + 24 - 3x^2 - 19x - 28}{3(x + 4)(x - 2)} \leq 0;$$

$$\frac{2x - 4}{3(x + 4)(x - 2)} \leq 0; \quad \frac{2(x - 2)}{3(x + 4)(x - 2)} \leq 0.$$

Корень $x = 2$ двойной кратности.



Ответ: $(-\infty; -4).$

$$9. \frac{6}{-4x - x^2} - \frac{2}{x^2 - 4x} + \frac{x}{x^2 - 16} \geq 0.$$

$$\frac{6}{-x(x+4)} - \frac{2}{x(x-4)} + \frac{x}{(x+4)(x-4)} \geq 0;$$

$$\frac{-6(x-4) - 2(x+4) + x^2}{x(x-4)(x+4)} \geq 0;$$

$$\frac{x^2 - 8x + 16}{x(x-4)(x+4)} \geq 0; \quad \frac{(x-4)^2}{x(x-4)(x+4)} \geq 0$$



Ответ: $(-4; 0) \cup (4; +\infty)$.

$$10. \left(\frac{x^2 + 2x + 4}{4x^2 - 1} \cdot \frac{2x^2 - x}{-x^3 + 8} - \frac{2 - x}{2x^2 + x} \right) : \frac{4}{x^2 - 2x} \geq \frac{4 - x}{x + 2x^2}.$$

$$x^3 - 8 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4); \quad x \neq 2, \quad x \neq \pm \frac{1}{2}, \quad x \neq 0.$$

$$\left(\frac{(x^2 + 2x + 4) \cdot x \cdot (2x - 1)}{(2x + 1)(2x - 1)(2 - x)(x^2 + 2x + 4)} - \frac{2 - x}{x(2x + 1)} \right) \cdot \frac{x(x - 2)}{4} - \frac{4 - x}{x(1 + 2x)} \geq 0;$$

$$\left(\frac{x}{(2x + 1)(2 - x)} - \frac{2 - x}{x(2x + 1)} \right) \frac{x(x - 2)}{4} - \frac{4 - x}{x(1 + 2x)} \geq 0$$

(так как $x^2 + 2x + 4 > 0$ при всех x).

$$\frac{x^2 - (2 - x)^2}{(2x + 1)(2 - x)x} \cdot \frac{x(x - 2)}{4} - \frac{4 - x}{x(1 + 2x)} \geq 0;$$

$$\frac{(x + 2 - x)(x - 2 + x)x(x - 2)}{(2x + 1)(2 - x)x \cdot 4} - \frac{4 - x}{x(1 + 2x)} \geq 0;$$

$$\frac{2 \cdot 2(x - 1) \cdot (-1)}{4(2x + 1)} - \frac{4 - x}{x(1 + 2x)} \geq 0;$$

$$\frac{1 - x}{2x + 1} - \frac{4 - x}{x(1 + 2x)} \geq 0;$$

$$\frac{x - x^2 - 4 + x}{x(1 + 2x)} \geq 0;$$

$$\frac{-(x^2 - 2x + 4)}{x(1 + 2x)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-1}{x(1 + 2x)} \geq 0$$

(так как $x^2 - 2x + 4 > 0$ при всех x).

$$-\frac{1}{x(1 + 2x)} \geq 0 \text{ при всех } x \neq 2; x \neq \pm \frac{1}{2}; x \neq 0.$$



Ответ: $\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$.

Примечание. Так как в процессе решения неравенства произошли сокращения на множители $(x - 2)$ и $x - \frac{1}{2}$, то это означает, что по сути $x = 2$ и $x = \frac{1}{2}$ — корни двойной кратности. Значит, проходя через них, функция меняет свой знак дважды.

Проверочная работа 1

Решите неравенства 1--10:

$$1. \frac{x-4}{(x-3)x} < 0.$$

$$2. \frac{5+4x}{(x-2)(x+1)} \geq 0.$$

$$3. \frac{16-25x^2}{x^2-4x+4} > 0.$$

$$4. \frac{49x^2-70x+25}{x^2-3x} \leq 0.$$

$$5. \frac{4x-3}{x-5} > 5.$$

$$6. \frac{6x+1}{4x-3} \leq \frac{3x+2}{2x+1}.$$

$$7. \frac{6}{-4x+2} - \frac{5x}{1-2x} \leq 0.$$

$$8. \frac{x^2+3x-2}{(x-1)^2-9} - \frac{3x+1}{3x-12} \leq 0.$$

$$9. \frac{1}{2x^2-5x} - \frac{2}{25+10x} + \frac{4}{25-4x^2} \geq 0.$$

$$10. \left(\frac{4}{x^2+4x} + \frac{32-3x}{x^3+64} \right) : \frac{x+8}{x^3-4x^2+16x} \geq \frac{4}{4+x}.$$

Итак, если у вас все получилось, то можно перейти к следующей теме, если нет, имеет смысл еще потренироваться.

Тренировочная работа 2

1. $(x - 2)^2(x + 3)^3x < 0.$

2. $(x^2 - x - 2)(x - 2)(x - 1) \leq 0.$

3. $(1 - x^3)^2(x^2 - 5x) \leq 0.$

4. $(1 - 2x)(x + 2) > 0.$

5. $1 - 2x \leq \frac{3}{x}.$

6. $\frac{7 - x}{x} < 3.$

7. $\frac{x + 3}{x - 2} \geq \frac{x - 3}{x + 4}.$

8. $(x^2 - 3x)^2 - 2(x^2 - 3x) - 8 > 0.$

9. $\frac{x^2 + x - 20}{(x - 3)x} > 0.$

10. $\frac{x^4 + 5x^2 - 6}{(4 - x)^3} < 0.$

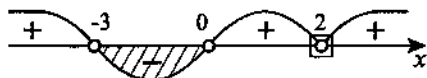
11. $\left(\frac{3 - x}{2 + x}\right)^2 > 1.$

12. $\left(\frac{x + 2}{x + 3}\right)^2 \geq \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + x - 6}.$

Проверьте, правильно ли вы решили.

Решение тренировочной работы 2

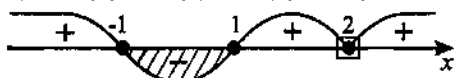
1. $(x-2)^2(x+3)^3x < 0$.

Ответ: $(-3; 0)$.

2. $(x^2 - x - 2)(x - 2)(x - 1) \leq 0$.

Так как $x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1)$,

$$(x - 2)(x + 1)(x - 2)(x - 1) \leq 0.$$

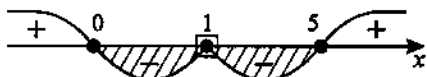
Ответ: $[-1; 1] \cup \{2\}$.

3. $(1 - x^3)^2(x^2 - 5x) \leq 0$.

$$(1 - x)^2(1 + x + x^2) \cdot x(x - 5) \leq 0;$$

 $x^2 + x + 1 > 0$ (при всех x), так как $\begin{cases} a = 1 > 0, \\ D = -3 < 0; \end{cases}$ $(1 - x)^2 = (x - 1)^2$ — вид канонический.

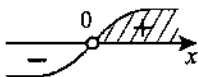
$$(1 - x)^2 \cdot x(x - 5) \leq 0.$$

Ответ: $[0; 5]$.

4. $(1 - 2x)(x + 2) > 0$.

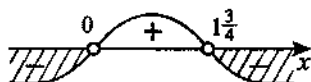
Ответ: $\left(-2; \frac{1}{2}\right)$.

5. $1 - 2x \leq \frac{3}{x}$. $\frac{2x^2 - x + 3}{x} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} \geq 0$,

так как $2x^2 - x + 3 > 0$ (при всех x) и $\begin{cases} a = 2 > 0, \\ D = -23. \end{cases}$ Ответ: $(0; +\infty)$.

$$6. \frac{7-x}{x} < 3.$$

$$\frac{7-x-3x}{x} < 0; \quad \frac{7-4x}{x} < 0.$$

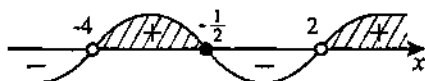


$$\text{Ответ: } (-\infty; 0) \cup \left(1\frac{3}{4}; +\infty\right).$$

$$7. \frac{x+3}{x-2} \geq \frac{x-3}{x+4}.$$

$$\frac{(x+3)(x+4) - (x-3)(x-2)}{(x-2)(x+4)} \geq 0;$$

$$\frac{x^2 + 7x + 12 - x^2 + 5x - 6}{(x-2)(x+4)} \geq 0; \quad \frac{12x + 6}{(x-2)(x+4)} \geq 0.$$



$$\text{Ответ: } \left[-4; -\frac{1}{2}\right] \cup (2; +\infty).$$

$$8. (x^2 - 3x)^2 - 2(x^2 - 3x) - 8 > 0.$$

$$\text{Пусть } x^2 - 3x = t.$$

$$t^2 - 2t - 8 = (t+2)(t-4) = (x^2 - 3x + 2)(x^2 - 3x - 4) = \\ = (x-1)(x-2)(x-4)(x+1).$$

$$\text{Итак, } (x-1)(x-2)(x-4)(x+1) > 0.$$



$$\text{Ответ: } (-\infty; -1) \cup (1; 2) \cup (4; +\infty).$$

$$9. \frac{x^2 + x - 20}{(x-3)x} > 0.$$

$$\frac{(x+5)(x-4)}{(x-3)x} > 0.$$



$$\text{Ответ: } (-\infty; -5) \cup (0; 3) \cup (4; +\infty).$$

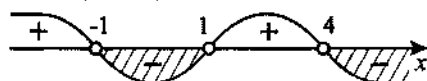
$$10. \frac{x^4 + 5x^2 - 6}{(4-x)^3} < 0.$$

$$x^4 + 5x^2 - 6 = (x^2 + 6)(x^2 - 1), \text{ так как } x^2 = t;$$

$$x^4 + 5x^2 - 6 = t^2 + 5t - 6 = (t+6)(t-1) = (x^2+6)(x^2-1);$$

$$x^2 + 6 > 0 \text{ (при всех } x);$$

$$\frac{(x^2+6)(x^2-1)}{-(x-4)^3} < 0 \Leftrightarrow \frac{(x+1)(x-1)}{-(x-4)^3} < 0.$$



Ответ: $(-1; 1) \cup (4; +\infty)$.

$$11. \left(\frac{3-x}{2+x}\right)^2 > 1.$$

$$\left(\frac{3-x}{2+x}\right)^2 - 1 > 0; \quad \left(\frac{3-x}{2+x} + 1\right) \cdot \left(\frac{3-x}{2+x} - 1\right) > 0;$$

$$\frac{3-x+2+x}{2+x} \cdot \frac{3-x-2-x}{2+x} > 0; \quad \frac{5(1-2x)}{(2+x)^2} > 0.$$



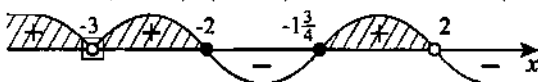
Ответ: $(-\infty; -2) \cup (-2; \frac{1}{2})$.

$$12. \left(\frac{x+2}{x+3}\right)^2 \geq \frac{x^2+3x+2}{x^2+x-6}.$$

$$\left(\frac{x+2}{x+3}\right)^2 - \frac{(x+1)(x+2)}{(x+3)(x-2)} \geq 0; \quad \frac{x+2}{x+3} \cdot \left[\frac{x+2}{x+3} - \frac{x+1}{x-2}\right] \geq 0;$$

$$\frac{x+2}{x+3} \cdot \frac{(x+2)(x-2) - (x+1)(x+3)}{(x+3)(x-2)} \geq 0;$$

$$\frac{(x+2)(x^2-4-x^2-4x-3)}{(x+3)^2(x-2)} \geq 0; \quad \frac{-(x+2)(4x+7)}{(x+3)^2(x-2)} \geq 0.$$



Ответ: $(-\infty; -3) \cup (-3; -2] \cup \left[-1\frac{3}{4}; 2\right)$.

Проверочная работа 2

1. $(x^2 + x + 2)(x + 2)(1 - x)^2 > 0.$

2. $(x^4 - x^2 + 2)(x^2 + x - 2)^2 \leq 0.$

3. $(1 - x^2)^3(x^2 + 5x) > 0.$

4. $(3x - 2)(3 - 2x) < 0.$

5. $x + \frac{5}{x} \leq 6.$

6. $\frac{x - 2}{x + 3} \leq \frac{x + 4}{x - 3}.$

7. $2(x + 2)^2 - 3(x + 2) + 1 \leq 0.$

8. $\left(x + \frac{6}{x}\right)^2 + 2\left(x + \frac{6}{x}\right) - 35 \leq 0.$

9. $\frac{(-20x^2 + x + 1)(x - 2)}{x^2 + 3} < 0.$

10. $\frac{(1 - x^8)(1 - x^6)(1 - x^4)}{(1 - x^3)(1 + 2x)^3} \leq 0.$

11. $\left(\frac{x + 1}{4 - x}\right)^2 \leq \frac{1}{4}.$

12. $\left(\frac{x - 2}{x + 1}\right)^2 \leq \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - x - 2}.$

Системы неравенств

Практикум 2

1.
$$\begin{cases} \frac{x+4}{2} - \frac{4-3x}{4} < \frac{1}{6}, \\ 3x^2 + 7x - 6 \leq 0. \end{cases}$$
2.
$$\begin{cases} (x+2)(2-x) < (x+3)(4-x), \\ \frac{3+x}{4} + \frac{1-2x}{6} \geq 1. \end{cases}$$
3.
$$\begin{cases} \frac{x^2-7}{2x-7} > 1, \\ \frac{3x-2}{5} - \frac{6-x}{2} \geq 2x-7. \end{cases}$$
4.
$$\begin{cases} \frac{7x+3}{x+3} \geq \frac{-x}{2(x+3)}, \\ \frac{4+x}{2x-3} \leq \frac{5+3x}{3-2x}. \end{cases}$$
5.
$$\begin{cases} \frac{x-5}{x-6} < \frac{x+7}{x+6}, \\ \frac{x+4}{x+8} > \frac{x-7}{x-3}. \end{cases}$$
6.
$$\begin{cases} \frac{x+7}{x-5} + \frac{3x+1}{2} \geq 0, \\ (5-x)^2 \leq 2^2. \end{cases}$$
7.
$$\begin{cases} (x-2)^2 \geq 1, \\ \frac{2x+3}{x^2-1} < \frac{7}{3}. \end{cases}$$
8.
$$\begin{cases} \frac{x^3-8x^2+12x}{x-6} \leq 6x, \\ x-2 \leq \frac{x^3-8x^2+12x}{x-6}. \end{cases}$$
9.
$$\begin{cases} \frac{x^2-5x+11}{x^2-x-2} + \frac{7}{x+1} \leq 0, \\ \frac{2x^2-14x+6}{x^2-4x+3} \geq \frac{3x-8}{x-3}. \end{cases}$$
10.
$$\begin{cases} (x^2+3x+2)(x^2+3x+4) < 48, \\ (x^2-2x)(x^2-2x+5) < 24. \end{cases}$$

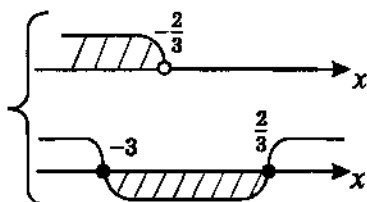
Решение практикума 2

$$1. \left\{ \begin{array}{l} \frac{x+4}{2} - \frac{4-3x}{4} < \frac{1}{6}, \\ 3x^2 + 7x - 6 \leq 0. \end{array} \right. \quad | \cdot 12$$

$$3x^2 + 7x - 6 = 0; \quad x_{1,2} = \frac{-7 \pm 11}{6}; \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{2}{3} \\ x = -3. \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 6(x+4) - 3(4-3x) < 2, \\ 3\left(x - \frac{2}{3}\right)(x+3) \leq 0; \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 15x + 10 < 0, \\ 3\left(x - \frac{2}{3}\right)(x+3) \leq 0. \end{array} \right.$$



$$\text{Ответ: } \left[-3; -\frac{2}{3}\right).$$

$$2. \left\{ \begin{array}{l} (x+2)(2-x) < (x+3)(4-x), \\ \frac{3+x}{4} + \frac{1-2x}{6} \geq 1; \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 4 - x^2 < -x^2 + x + 12, \\ 3(3+x) + 2(1-2x) \geq 12; \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x > -8, \\ x \leq -1. \end{array} \right.$$

$$\text{Ответ: } (-8; -1].$$

$$3. \left\{ \begin{array}{l} \frac{x^2-7}{2x-7} > 1, \\ \frac{3x-2}{5} - \frac{6-x}{2} \geq 2x-7; \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x^2-7-2x+7}{2x-7} > 0, \\ 2(3x-2) - 5(6-x) \geq 20x-70; \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x(x-2)}{2x-7} > 0, \\ x \leq 4. \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{График функции } y = \frac{x(x-2)}{2x-7} \text{ с нулями в } 0, 2, 3,5 \text{ и асимптотой в } 4. \\ \text{Область } x \leq 4 \text{ заштрихована.} \end{array} \right.$$

Ответ: $(0; 2) \cup (3, 5; 4]$.

$$4. \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{7x+3}{x+3} \geq \frac{-x}{2(x+3)}, \\ \frac{4+x}{2x-3} \leq \frac{5+3x}{3-2x}; \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{2(7x+3)+x}{2(x+3)} \geq 0, \\ \frac{4+x+5+3x}{2x-3} \leq 0; \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{15x+6}{2(x+3)} \geq 0, \\ \frac{4x+9}{2x-3} \leq 0. \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{График функции } y = \frac{15x+6}{2(x+3)} \text{ с нулями в } -3, -\frac{2}{5} \text{ и асимптотой в } -\frac{3}{2}. \\ \text{График функции } y = \frac{4x+9}{2x-3} \text{ с нулями в } -2\frac{1}{4}, 1\frac{1}{2} \text{ и асимптотой в } \frac{3}{2}. \\ \text{Область } -0,4 \leq x < 1,5 \text{ заштрихована.} \end{array} \right.$$

Ответ: $[-0,4; 1,5)$.

$$5. \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{x-5}{x-6} < \frac{x+7}{x+6}, \\ \frac{x+4}{x+8} > \frac{x-7}{x-3}. \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{(x-5)(x+6) - (x+7)(x-6)}{(x-6)(x+6)} < 0, \\ \frac{(x+4)(x-3) - (x-7)(x+8)}{(x+8)(x-3)} > 0; \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x^2+x-30 - x^2-x+42}{(x-6)(x+6)} < 0, \\ \frac{x^2+x-12 - x^2-x+56}{(x+8)(x-3)} > 0; \end{array} \right.$$

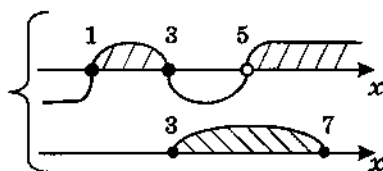
$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{12}{(x-6)(x+6)} < 0, \\ \frac{44}{(x+8)(x-3)} > 0. \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{График функции } y = \frac{12}{(x-6)(x+6)} \text{ с нулями в } -6, 6 \text{ и асимптотой в } 0. \\ \text{График функции } y = \frac{44}{(x+8)(x-3)} \text{ с нулями в } -8, 3 \text{ и асимптотой в } 0. \\ \text{Область } (3; 6) \text{ заштрихована.} \end{array} \right.$$

Ответ: $(3; 6)$.

$$6. \begin{cases} \frac{x+7}{x-5} + \frac{3x+1}{2} \geq 0, \\ (5-x)^2 \leq 2^2. \end{cases}$$

Так как $(\alpha)^2 < (\beta)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha < |\beta|, \\ \alpha > -|\beta|, \end{cases}$ то

$$\begin{cases} \frac{2(x+7) + (3x+1)(x-5)}{2(x-5)} \geq 0, \\ \begin{cases} 5-x \leq 2, \\ 5-x \geq -2; \end{cases} \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{3x^2 - 14x - 5 + 2x + 14}{2(x-5)} \geq 0, \\ \begin{cases} x \geq 3, \\ x \leq 7; \end{cases} \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{3x^2 - 12x + 9}{2(x-5)} \geq 0, \\ 3 \leq x \leq 7. \end{cases}$$



Ответ: $(5; 7] \cup \{3\}$.

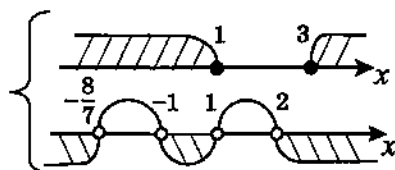
$$7. \begin{cases} (x-2)^2 \geq 1, \\ \frac{2x+3}{x^2-1} < \frac{7}{3}. \end{cases} \quad \text{Так как } (\alpha)^2 > (\beta)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha > |\beta|, \\ \alpha < -|\beta|, \end{cases} \text{ то}$$

$$\begin{cases} \begin{cases} x-2 \geq 1 \\ x-2 \leq -1, \end{cases} \\ \frac{3(2x+3) - 7(x^2-1)}{3(x^2-1)} < 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{cases} x \geq 3 \\ x \leq 1, \end{cases} \\ \frac{-7x^2 + 6x + 16}{3(x+1)(x-1)} < 0; \end{cases}$$

$$7x^2 - 6x - 16 = 0; \quad x_{1,2} = \frac{3 \pm 11}{7}; \quad \begin{cases} x = 2 \\ x = -\frac{8}{7}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 3 \\ x \leq 1, \\ \frac{-7(x-2)(x+\frac{8}{7})}{3(x+1)(x-1)} < 0. \end{cases}$$



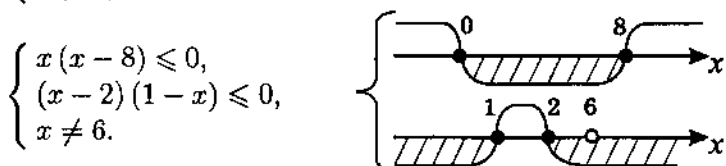
Ответ: $(-\infty; -\frac{8}{7}) \cup (-1; 1) \cup [3; \infty)$.

$$8. \begin{cases} \frac{x^3 - 8x^2 + 12x}{x - 6} \leq 6x, \\ x - 2 \leq \frac{x^3 - 8x^2 + 12x}{x - 6}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x(x^2 - 8x + 12)}{x - 6} \leq 6x, \\ x - 2 \leq \frac{x(x^2 - 8x + 12)}{x - 6}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x(x-2)(x-6)}{x-6} \leq 6x, \\ x - 2 \leq \frac{x(x-2)(x-6)}{x-6}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(x-2) \leq 6x, \\ x-2 \leq x(x-2), \\ x \neq 6; \end{cases}$$



Ответ: $[0; 1] \cup [2; 6) \cup (6; 8]$.

$$\begin{aligned}
 9. \quad & \begin{cases} \frac{x^2 - 5x + 11}{x^2 - x - 2} + \frac{7}{x + 1} \leq 0, \\ \frac{2x^2 - 14x + 6}{x^2 - 4x + 3} \geq \frac{3x - 8}{x - 3}; \end{cases} \\
 & \begin{cases} \frac{x^2 - 5x + 11 + 7(x - 2)}{(x - 2)(x + 1)} \leq 0, \\ \frac{2x^2 - 14x + 6 - (3x - 8)(x - 1)}{(x - 3)(x - 1)} \geq 0; \end{cases} \\
 & \begin{cases} \frac{x^2 + 2x - 3}{(x - 2)(x + 1)} \leq 0, \\ \frac{2x^2 - 14x + 6 - 3x^2 + 11x - 8}{(x - 3)(x + 1)} \geq 0; \end{cases} \\
 & \begin{cases} \frac{x^2 + 2x - 3}{(x - 2)(x + 1)} \leq 0, \\ \frac{-x^2 - 3x - 2}{(x - 3)(x + 1)} \geq 0; \end{cases} \\
 & \begin{cases} \frac{(x + 3)(x - 1)}{(x - 2)(x + 1)} \leq 0, \\ \frac{-(x + 1)(x + 2)}{(x - 3)(x + 1)} \geq 0. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Ответ: $[-2; -1) \cup [1; 2)$.

$$10. \quad \begin{cases} (x^2 + 3x + 2)(x^2 + 3x + 4) < 48, \\ (x^2 - 2x)(x^2 - 2x + 5) < 24. \end{cases}$$

Пусть $x^2 + 3x + 2 = t$ для первого неравенства и $x^2 - 2x = z$ для второго неравенства, тогда система примет вид

$$\begin{cases} t(t + 2) < 48, \\ z(z + 5) < 24; \\ t^2 + 2t - 48 < 0, \\ z^2 + 5z - 24 < 0; \end{cases}$$

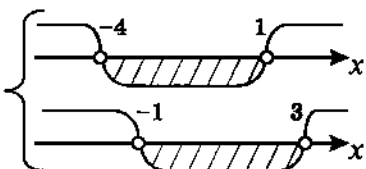
$$\begin{cases} (t+8)(t-6) < 0, \\ (z+8)(z-3) < 0. \end{cases}$$

Теперь вместо t и z вновь возвратимся к прежнему x :

$$\begin{cases} (x^2 + 3x + 10)(x^2 + 3x - 4) < 0, \\ (x^2 - 2x + 8)(x^2 - 2x - 3) < 0. \end{cases}$$

Так как $x^2 + 3x + 10 > 0$ (при всех x) $\begin{cases} a = 1 > 0, \\ D < 0 \end{cases}$

и $x^2 - 2x + 5 > 0$ (при всех x) $\begin{cases} a = 1 > 0, \\ D < 0, \end{cases}$ то

$$\begin{cases} (x+4)(x-1) < 0, \\ (x-3)(x+1) < 0. \end{cases}$$


Ответ: $(-1; 1)$.

Тренировочная работа 3

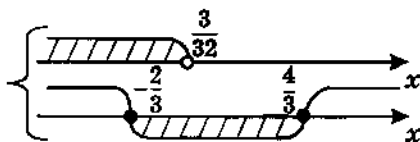
1. $\begin{cases} \frac{x+2}{5} - \frac{-4x}{12} < \frac{1}{30}, \\ 9x^2 - 6x - 8 \leq 0. \end{cases}$
2. $\begin{cases} (x+3)(3-x) < (x+4)(5-x), \\ \frac{x+4}{14} + \frac{2-3x}{4} \geq 1. \end{cases}$
3. $\begin{cases} \frac{x^2-9}{4x-9} > 1, \\ \frac{4x-3}{7} - \frac{5-x}{5} \leq \frac{x+3}{2}. \end{cases}$
4. $\begin{cases} \frac{3x+5}{x+4} \geq \frac{x}{2(x+4)}, \\ \frac{10+2x}{3x-5} \leq \frac{6+4x}{5-3x}. \end{cases}$
5. $\begin{cases} \frac{2x-7}{x-4} < \frac{2x+9}{x+4}, \\ \frac{3x+5}{3x+8} > \frac{3x-7}{3x-4}. \end{cases}$
6. $\begin{cases} \frac{x+8}{x-4} + \frac{3x+4}{2} \geq 0, \\ (4-x)^2 \leq 2^2. \end{cases}$
7. $\begin{cases} \frac{2x-1}{x^2-4x+3} < \frac{7}{3}, \\ (x-4)^2 \geq 1, \end{cases}$
8. $\begin{cases} \frac{x^3-8x^2+15x}{x-5} \leq 3x, \\ x-3 \leq \frac{x^3-8x^2+15x}{x-5}. \end{cases}$
9. $\begin{cases} \frac{x^2-9x+25}{x^2-5x+4} + \frac{7}{x-1} \leq 0, \\ \frac{2x^2-22x+42}{x^2-8x+15} \geq \frac{3x-14}{x-5}. \end{cases}$
10. $\begin{cases} (x^2-6x+8)(x^2-6x+13) < 24, \\ (x^2-x)(x^2-x+2) < 48. \end{cases}$

Решение тренировочной работы 3

$$1. \left\{ \begin{array}{l} \frac{x+2}{5} - \frac{5-4x}{12} < \frac{1}{30} \\ 9x^2 - 6x - 8 \leq 0 \end{array} \right. \quad | \cdot 60$$

$$9x^2 - 6x - 8 = 0; \quad x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+72}}{9} = \frac{3 \pm 9}{9}; \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{4}{3} \\ x = -\frac{2}{3} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 12(x+2) - 5(5-4x) < 2, \\ 9\left(x - \frac{4}{3}\right)\left(x + \frac{2}{3}\right) \leq 0; \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} 32x - 3 < 0, \\ 9\left(x - \frac{4}{3}\right)\left(x + \frac{2}{3}\right) \leq 0. \end{array} \right.$$



$$\text{Ответ: } \left[-\frac{2}{3}; \frac{3}{32} \right).$$

$$2. \left\{ \begin{array}{l} (x+3)(3-x) < (x+4)(5-x), \\ \frac{x+4}{14} + \frac{2-3x}{4} \geq 1; \end{array} \right.$$

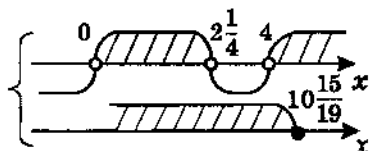
$$\left\{ \begin{array}{l} 9 - x^2 < -x^2 + x + 20, \\ 4(x+4) + 14(2-3x) \geq 56; \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x > -11, \\ x \leq -\frac{6}{19}. \end{array} \right.$$

$$\text{Ответ: } \left(-11; -\frac{6}{19} \right].$$

$$3. \left\{ \begin{array}{l} \frac{x^2-9}{4x-9} > 1, \\ \frac{4x-3}{7} - \frac{5-x}{5} \leq \frac{x+3}{2}; \end{array} \right.$$

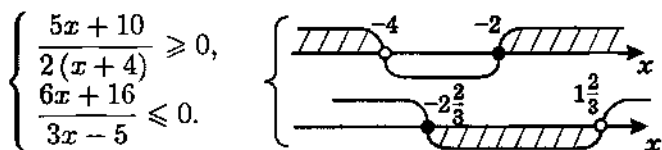
$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x^2-9-4x+9}{4x-9} > 0, \\ 10(4x-3) - 14(5-x) \leq 35(x+3); \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} \frac{x^2 - 4x}{4x - 9} > 0, \\ 40x - 30 - 70 + 14x \leq 35x + 105; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{x(x-4)}{4x-9} > 0, \\ 19x \leq 205. \end{cases}$$



Ответ: $\left(0; 2\frac{1}{4}\right) \cup \left(4; 10\frac{15}{19}\right]$.

$$4. \quad \begin{cases} \frac{3x+5}{x+4} \geq \frac{x}{2(x+4)}, \\ \frac{10+2x}{3x-5} \leq \frac{6+4x}{5-3x}; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{2(3x+5)-x}{2(x+4)} \geq 0, \\ \frac{10+2x+6+4x}{3x-5} \leq 0; \end{cases}$$

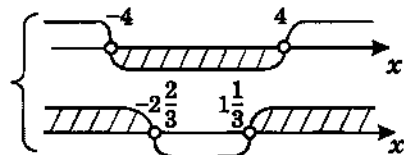


Ответ: $\left[-2; 1\frac{2}{3}\right)$.

$$5. \quad \begin{cases} \frac{2x-7}{x-4} < \frac{2x+9}{x+4}, \\ \frac{3x+5}{3x+8} > \frac{3x-7}{3x-4}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{(2x-7)(x+4) - (2x+9)(x-4)}{(x-4)(x+4)} < 0, \\ \frac{(3x+5)(3x-4) - (3x-7)(3x+8)}{(3x+8)(3x-4)} > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{2x^2 + x - 28 - 2x^2 - x + 36}{(x-4)(x+4)} < 0, \\ \frac{9x^2 + 3x - 20 - 9x^2 - 3x + 56}{(3x+8)(3x-4)} > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{8}{(x-4)(x+4)} < 0, \\ \frac{(3x+8)(3x-4)}{36} > 0. \end{cases}$$


Ответ: $\left(-4; -2\frac{2}{3}\right) \cup \left(1\frac{1}{3}; 4\right)$.

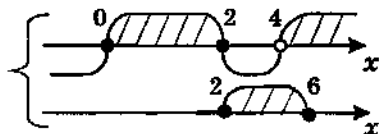
6.
$$\begin{cases} \frac{x+8}{x-4} + \frac{3x+4}{2} \geq 0, \\ (4-x)^2 \leq 2^2. \end{cases}$$

Так как $\alpha^2 < \beta^2 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha < |\beta|, \\ \alpha > -|\beta|, \end{cases}$ то

$$\begin{cases} \frac{2(x+8) + (x-4)(3x+4)}{2(x-4)} \geq 0, \\ \begin{cases} 4-x \leq 2, \\ 4-x \geq -2; \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{2x+16+3x^2-8x-16}{2(x-4)} \geq 0, \\ \begin{cases} x \geq 2, \\ x \leq 6; \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{3x^2-6x}{2(x-4)} \geq 0, \\ 2 \leq x \leq 6. \end{cases}$$



Ответ: $(4; 6] \cup \{2\}$.

7.
$$\begin{cases} (x-4)^2 \geq 1, \\ \frac{2x-1}{x^2-4x+3} < \frac{7}{3}. \end{cases}$$

Так как $\alpha^2 > \beta^2 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha > |\beta|, \\ \alpha < -|\beta|, \end{cases}$ то

$$\begin{cases} \begin{cases} x-4 \geq 1 \\ x-4 \leq -1, \end{cases} \\ \frac{3(2x-1) - 7(x^2-4x+3)}{3(x^2-4x+3)} < 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 5 \\ x \leq 3, \\ \frac{-7x^2 + 34x - 24}{3(x^2 - 4x + 3)} < 0. \end{cases}$$

$$7x^2 - 34x + 24 = 0;$$

$$x_{1,2} = \frac{17 \pm \sqrt{289 - 168}}{7} = \frac{17 \pm 11}{7}; \quad \begin{cases} x = 4 \\ x = \frac{6}{7}; \end{cases}$$

$$x^2 - 4x + 3 = (x - 3)(x - 1);$$

$$\begin{cases} x \geq 5 \\ x \leq 3, \\ \frac{-7(x-4)(x-\frac{6}{7})}{3(x-1)(x-3)} < 0. \end{cases} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Diagram 1: Number line with points 3 and 5. Region } (3, 5) \text{ is shaded.} \\ \text{Diagram 2: Number line with points } \frac{6}{7}, 1, 3, 4. \text{ Regions } (-\infty, \frac{6}{7}), (1, 3), (4, \infty) \text{ are shaded.} \end{array} \right.$$

$$\text{Ответ: } \left(-\infty; \frac{6}{7}\right) \cup (1; 3) \cup [5; \infty).$$

$$8. \quad \begin{cases} \frac{x^3 - 8x^2 + 15x}{x - 5} \leq 3x, \\ x - 3 \leq \frac{x^3 - 8x^2 + 15x}{x - 5}; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{x(x^2 - 8x + 15)}{x - 5} \leq 3x, \\ x - 3 \leq \frac{x(x^2 - 8x + 15)}{x - 5}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x(x-3)(x-5)}{x-5} \leq 3x, \\ x-3 \leq \frac{x(x-3)(x-5)}{x-5}; \end{cases} \quad \begin{cases} x(x-3) \leq 3x, \\ x-3 \leq x(x-3), \\ x \neq 5; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{cases} x(x-6) \leq 0, \\ (x-3)(1-x) \leq 0, \\ x \neq 5. \end{cases} \\ \text{Diagram 3: Number line with points 0 and 6. Region } [0, 6] \text{ is shaded.} \\ \text{Diagram 4: Number line with points 1, 3, 5. Regions } (-\infty, 1), (3, 5), (5, \infty) \text{ are shaded.} \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } [0; 1] \cup [3; 5) \cup (5; 6].$$

$$\begin{aligned}
 9. \quad & \begin{cases} \frac{x^2 - 9x + 25}{x^2 - 5x + 4} + \frac{7}{x-1} \leq 0, \\ \frac{2x^2 - 22x + 42}{x^2 - 8x + 15} \geq \frac{3x - 14}{x-5}; \end{cases} \\
 & \begin{cases} \frac{x^2 - 9x + 25 + 7(x-4)}{(x-1)(x-4)} \leq 0, \\ \frac{2x^2 - 22x + 42 - (3x-14)(x-3)}{(x-5)(x-3)} \geq 0; \end{cases} \\
 & \begin{cases} \frac{x^2 - 9x + 25 + 7x - 28}{(x-1)(x-4)} \leq 0, \\ \frac{2x^2 - 22x + 42 - 3x^2 + 23x - 42}{(x-5)(x-3)} \geq 0; \end{cases} \\
 & \begin{cases} \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)(x-4)} \leq 0, \\ \frac{-x^2 + x}{(x-5)(x-3)} \geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{(x-3)(x+1)}{(x-1)(x-4)} \leq 0, \\ \frac{-x(x-1)}{(x-5)(x-3)} \geq 0. \end{cases} \\
 & \left\{ \begin{array}{l} \text{Number line 1: points } -1, 1, 3, 4. \text{ Shaded regions: } (-1, 1) \text{ and } (3, 4). \\ \text{Number line 2: points } 0, 1, 3, 5. \text{ Shaded regions: } (0, 1) \text{ and } (3, 5). \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

Ответ: $[0; 1) \cup (3; 4)$.

$$10. \quad \begin{cases} (x^2 - 6x + 8)(x^2 - 6x + 13) < 24, \\ (x^2 - x)(x^2 - x + 2) < 48. \end{cases}$$

Пусть $x^2 - 6x + 8 = t$ для первого неравенства
и $x^2 - x = z$ для второго неравенства.

Тогда система примет вид

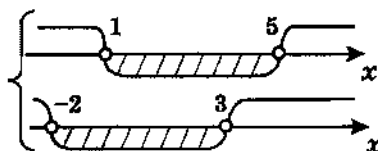
$$\begin{aligned}
 & \begin{cases} t(t+5) < 24, \\ z(z+2) < 48; \end{cases} \quad \begin{cases} t^2 + 5t - 24 < 0, \\ z^2 + 2z - 48 < 0; \end{cases} \\
 & \begin{cases} (t+8)(t-3) < 0, \\ (z+8)(z-6) < 0. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Теперь вместо t и z вновь возвратимся к прежнему x :

$$\begin{cases} (x^2 - 6x + 16)(x^2 - 6x + 5) < 0, \\ (x^2 - x + 8)(x^2 - x - 6) < 0. \end{cases}$$

Так как $x^2 - 6x + 16 = (x - 3)^2 + 7 > 0$ (при всех x) и $x^2 - x + 8 > 0$ (при всех x), учитывая, что $\begin{cases} a = 1 > 0, \\ D < 0. \end{cases}$

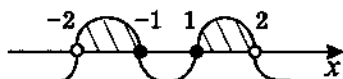
$$\begin{cases} x^2 - 6x + 5 < 0, \\ x^2 - x - 6 < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} (x - 5)(x - 1) < 0, \\ (x - 3)(x + 2) < 0. \end{cases}$$



Ответ: $(1; 3)$.

$$4. y = \sqrt{\frac{x^2 - 1}{4 - x^2}}.$$

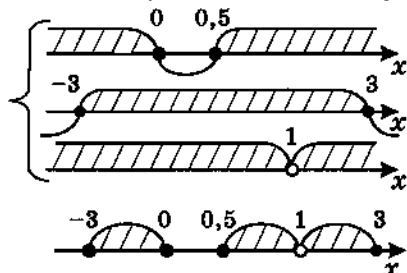
$$D(y) : \frac{x^2 - 1}{4 - x^2} \geq 0, \quad \frac{(x+1)(x-1)}{(2+x)(2-x)} \geq 0.$$



$$D(y) = (-2; -1] \cup [1; 2).$$

$$5. y = \sqrt{2x^2 - x} + \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x - 1}.$$

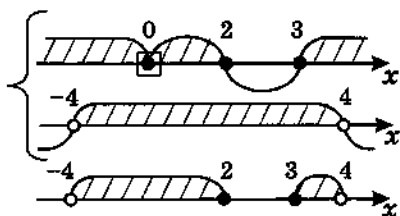
$$D(y) : \begin{cases} 2x^2 - x \geq 0, \\ 9 - x^2 \geq 0, \\ x - 1 \neq 0. \end{cases} \quad \begin{cases} x(2x - 1) \geq 0, \\ (3 + x)(3 - x) \geq 0, \\ x \neq 1. \end{cases}$$



$$D(y) = [-3; 0] \cup [0, 5; 1) \cup (1; 3].$$

$$6. y = \sqrt{x^2(x^2 - 5x + 6)} + \frac{1}{\sqrt{16 - x^2}}.$$

$$D(y) : \begin{cases} x^2(x^2 - 5x + 6) \geq 0, \\ 16 - x^2 > 0. \end{cases} \quad \begin{cases} x^2(x - 3)(x - 2) \geq 0, \\ (4 - x)(4 + x) > 0. \end{cases}$$



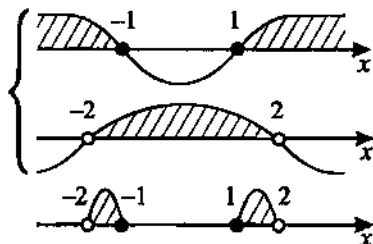
$$D(y) = (-4; 2] \cup [3; 4).$$

$$7. y = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt{4 - x^2}}.$$

$$D(y) : \begin{cases} x^2 - 1 \geq 0, \\ 4 - x^2 > 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x - 1)(x + 1) \geq 0, \\ (2 - x)(2 + x) > 0. \end{cases}$$

$$D(y) = (-2; -1] \cup [1; 2).$$

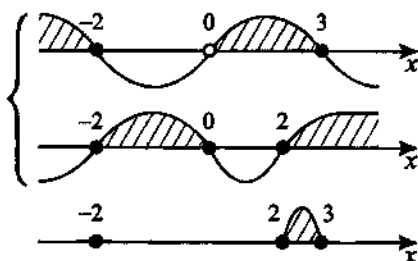


Примечание. Сравните с примером 4.

$$8. y = \sqrt{1 - x + \frac{6}{x}} \cdot \sqrt[4]{x^3 - 4x}.$$

$$D(y) : \begin{cases} 1 - x + \frac{6}{x} \geq 0, \\ x^3 - 4x \geq 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x - x^2 + 6}{x} \geq 0, \\ x(x^2 - 4) \geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{-(x - 3)(x + 2)}{x} \geq 0, \\ x(x - 2)(x + 2) \geq 0. \end{cases}$$



$$D(y) = [2; 3] \cup \{-2\}.$$

Тренировочная работа 4

Найдите область определения.

$$1. y = \frac{\sqrt{x+2}}{x^2-1}.$$

$$2. y = \sqrt{x+2} + \sqrt{\frac{1-x}{x}}.$$

$$3. y = \frac{\sqrt{x^2-2x}}{x^2-1} + \sqrt{4-x}.$$

$$4. y = \frac{\sqrt{x^2-2x}}{\sqrt{x^2-1}} + \sqrt{3-x}.$$

$$5. y = \sqrt{\frac{7x^2-8x+1}{x^2-9}} + \frac{1}{x^2-16}.$$

$$6. y = \sqrt{2x - \frac{1}{x} - 1} + \sqrt{\frac{6}{x} - x + 1}.$$

$$7. y = \sqrt{\frac{7x^2-10x+3}{7x-3}} - \frac{3}{2x-3}.$$

$$8. y = \sqrt{\frac{4x+1}{4x^2+5x+1}} - 2x - 1.$$

Решение тренировочной работы 4

Найдите область определения.

$$1. y = \frac{\sqrt{x+2}}{x^2-1}. \quad D(y): \begin{cases} x+2 \geq 0, \\ x^2-1 \neq 0. \end{cases} \quad \begin{array}{c} -2 \quad -1 \quad 1 \\ \text{---} \bullet \quad \circ \quad \bullet \text{---} \end{array} x$$

$$D(y) = [-2; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; \infty).$$

$$2. y = \sqrt{x+2} + \sqrt{\frac{1-x}{x}}. \quad \begin{cases} \begin{array}{c} -2 \quad \text{---} \bullet \text{---} \\ 0 \quad \circ \quad 1 \quad \bullet \text{---} \\ 0 \quad \circ \quad 1 \quad \bullet \text{---} \end{array} \end{cases} x$$

$$D(y): \begin{cases} x+2 \geq 0, \\ \frac{1-x}{x} \geq 0. \end{cases}$$

$$D(y) = (0; 1].$$

$$3. y = \frac{\sqrt{x^2-2x}}{x^2-1} + \sqrt{4-x}. \quad \begin{cases} \begin{array}{c} 0 \quad 2 \quad \bullet \text{---} \\ -1 \quad \circ \quad 1 \quad \bullet \text{---} \\ -1 \quad \circ \quad 0 \quad 2 \quad 4 \quad \bullet \text{---} \end{array} \end{cases} x$$

$$D(y): \begin{cases} x^2-2x \geq 0, \\ 4-x \geq 0, \\ x^2-1 \neq 0. \end{cases}$$

$$D(y) = (-\infty; -1) \cup (-1; 0] \cup [2; 4].$$

$$4. y = \frac{\sqrt{x^2-2x}}{\sqrt{x^2-1}} + \sqrt{3-x}. \quad \begin{cases} \begin{array}{c} 0 \quad 2 \quad \bullet \text{---} \\ -1 \quad \circ \quad 1 \quad \bullet \text{---} \\ 3 \quad \bullet \text{---} \\ -1 \quad \circ \quad 2 \quad 3 \quad \bullet \text{---} \end{array} \end{cases} x$$

$$D(y): \begin{cases} x^2-2x \geq 0, \\ x^2-1 > 0, \\ 3-x \geq 0. \end{cases}$$

$$D(y) = (-\infty; -1) \cup [2; 3].$$

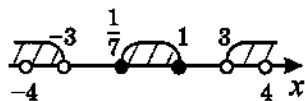
$$5. y = \sqrt{\frac{7x^2-8x+1}{x^2-9}} + \frac{1}{x^2-16}.$$

$$D(y): \begin{cases} \frac{7x^2-8x+1}{x^2-9} \geq 0, \\ x^2-16 \neq 0. \end{cases} \quad 7x^2-8x+1=0;$$

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-7}}{7} = \frac{4 \pm 3}{7}; \quad \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{1}{7}; \end{cases}$$

$$7x^2 - 8x + 1 = 7(x-1)\left(x - \frac{1}{7}\right).$$

$$\begin{cases} \frac{7(x-1)\left(x - \frac{1}{7}\right)}{(x+3)(x-3)} \geq 0, \\ (x+4)(x-4) \neq 0. \end{cases}$$



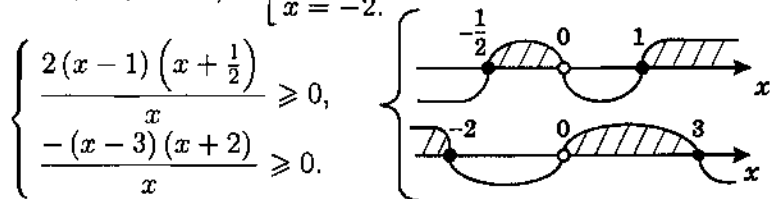
$$D(y) = (-\infty; -4) \cup (-4; -3) \cup \left[\frac{1}{7}; 1\right] \cup (3; 4) \cup (4; \infty).$$

$$6. \quad y = \sqrt{2x - \frac{1}{x} - 1} + \sqrt{\frac{6}{x} - x + 1}.$$

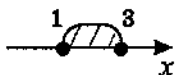
$$D(y): \begin{cases} 2x - \frac{1}{x} - 1 \geq 0, \\ \frac{6}{x} - x + 1 \geq 0. \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{2x^2 - x - 1}{x} \geq 0, \\ \frac{6 + x - x^2}{x} \geq 0. \end{cases}$$

$$2x^2 - x - 1 = 0; \quad x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4}; \quad \begin{cases} x = 1 \\ x = -\frac{1}{2}; \end{cases}$$

$$-x^2 + x + 6 = 0; \quad \begin{cases} x = 3 \\ x = -2. \end{cases}$$



$$D(y) = [1; 3].$$



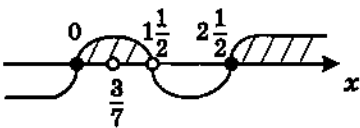
$$7. \quad y = \sqrt{\frac{7x^2 - 10x + 3}{7x - 3} - \frac{3}{2x - 3}}.$$

$$D(y): \frac{7x^2 - 10x + 3}{7x - 3} - \frac{3}{2x - 3} \geq 0.$$

$$7x^2 - 10x + 3 = 0; \quad x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-21}}{7} = \frac{5 \pm 2}{7}; \quad \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{3}{7}; \end{cases}$$

$$7x^2 - 10x + 3 = (x-1)(7x-3), \quad \frac{(7x-3)(x-1)}{7x-3} - \frac{3}{2x-3} \geq 0;$$

$$\begin{cases} x-1 - \frac{3}{2x-3} \geq 0, \\ 7x-3 \neq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{(x-1)(2x-3)-3}{2x-3} \geq 0, \\ x \neq \frac{3}{7}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{2x^2-5x}{2x-3} \geq 0, \\ x \neq \frac{3}{7}. \end{cases}$$


$$D(y) = \left[0; \frac{3}{7}\right) \cup \left(\frac{3}{7}; 1\frac{1}{2}\right) \cup \left[2\frac{1}{2}; \infty\right).$$

$$8. \quad y = \sqrt{\frac{4x+1}{4x^2+5x+1}} - 2x-1.$$

$$D(y): \frac{4x+1}{4x^2+5x+1} - 2x-1 \geq 0, \quad 4x^2+5x+1=0;$$

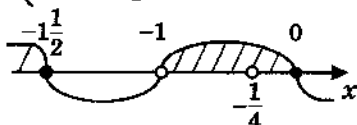
$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25-16}}{8} = \frac{-5 \pm 3}{8}; \quad \begin{cases} x = -1 \\ x = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

$$4x^2+5x+1 = 4(x+1)\left(x+\frac{1}{4}\right) = (x+1)(4x+1);$$

$$\frac{4x+1}{(x+1)(4x+1)} - 2x-1 \geq 0;$$

$$\begin{cases} \frac{1}{x+1} - (2x+1) \geq 0, \\ x \neq -\frac{1}{4}; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{1-(2x+1)(x+1)}{x+1} \geq 0, \\ x \neq -\frac{1}{4}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1-2x^2-3x-1}{x+1} \geq 0, \\ x \neq -\frac{1}{4}; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{-x(2x+3)}{x+1} \geq 0, \\ x \neq -\frac{1}{4}. \end{cases}$$



$$D(y) = \left(-\infty; -1\frac{1}{2}\right] \cup \left(-1; -\frac{1}{4}\right) \cup \left(-\frac{1}{4}; 0\right].$$

Решение более сложных неравенств**Тренировочная работа 5**

$$1. \frac{3x^2 - 7x + 2}{2 - 6x} \geq 0.$$

$$2. \frac{3x^2(x - 5)}{-3x^2 + 5x - 11} > 0.$$

$$3. \frac{(2x^2 - 7x - 15)(2x^3 + 3x^2 - 8x - 12)}{(15x^2 + 7x - 2)(-3x^2 - 12x + 63)} \geq 0.$$

$$4. \begin{cases} (1 - \sqrt{3})x \leq (\sqrt{3} - 1)^2, \\ \sqrt{243}x + 9 \leq 0. \end{cases}$$

$$5. \frac{x + 40}{x^3 - 16x} : \left(\frac{x - 4}{3x^2 + 11x - 4} - \frac{16}{16 - x^2} \right) \leq 0.$$

$$6. \begin{cases} x^2 + 5x < 0, \\ \frac{x^2 + 9x + 18}{-x^2 - 5x - 6} \leq 2. \end{cases}$$

$$7. \frac{9x^2 - 4}{2x^2 - 5x + 2} \cdot \frac{x - 2}{3x + 2} + \frac{x}{1 - 2x} \geq 0.$$

$$8. \frac{(3x^2 - x - 24)(36 - 12x + x^2)}{(27 + 3x - 2x^2)(2x^2 + 2x - 24)} \leq 0.$$

$$9. \frac{3 - x}{2x^2 - 11x + 5} \leq \frac{3 - x}{2x^2 + 15x + 25}.$$

$$10. \frac{x^4 - x^2 - 2x - 1}{x^2 - (2 - \sqrt{7})x - 2\sqrt{7}} \leq 0.$$

Решение тренировочной работы 5

$$1. \frac{3x^2 - 7x + 2}{2 - 6x} \geq 0.$$

$$3x^2 - 7x + 2 = 0;$$

$$x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 24}}{6} = \frac{7 \pm 5}{6}; \quad \begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$3x^2 - 7x + 2 = 3(x - 2) \left(x - \frac{1}{3}\right) = (x - 2)(3x - 1).$$

$$\frac{(x - 2)(3x - 1)}{2(1 - 3x)} \geq 0$$



$$\text{Ответ: } \left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}; 2\right].$$

$$2. \frac{3x^2(x - 5)}{-3x^2 + 5x - 11} > 0.$$

$$-3x^2 + 5x - 11 = 0; \quad 3x^2 - 5x + 11 = 0;$$

$$\begin{cases} D = 25 - 12 \cdot 11 < 0, \\ a = 3 > 0; \end{cases} \quad 3x^2 - 5x + 11 > 0 \quad (\text{при всех } x).$$

$$\text{Поэтому } \frac{3x^2(x - 5)}{-3x^2 + 5x - 11} > 0 \Leftrightarrow -3x^2(x - 5) > 0$$



$$\text{Ответ: } (-\infty; 0) \cup (0; 5).$$

$$3. \frac{(2x^2 - 7x - 15)(2x^3 + 3x^2 - 8x - 12)}{(15x^2 + 7x - 2)(-3x^2 - 12x + 63)} \geq 0.$$

$$a) \quad 2x^2 - 7x - 15 = 0;$$

$$x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 120}}{4} = \frac{7 \pm 13}{4}; \quad \begin{cases} x = 5 \\ x = -1,5 \end{cases}$$

$$2x^2 - 7x - 15 = 2(x + 1,5)(x - 5) = (2x + 3)(x - 5);$$

$$\begin{aligned} \text{б) } 2x^3 + 3x^2 - 8x - 12 &= x^2(2x + 3) - 4(2x + 3) = \\ &= (2x + 3)(x^2 - 4) = (2x + 3)(x + 2)(x - 2). \end{aligned}$$

$$\text{в) } 15x^2 + 7x - 2 = 0;$$

$$x_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 120}}{30} = \frac{-7 \pm 13}{30}; \quad \begin{cases} x = -\frac{2}{3} \\ x = \frac{1}{5}; \end{cases}$$

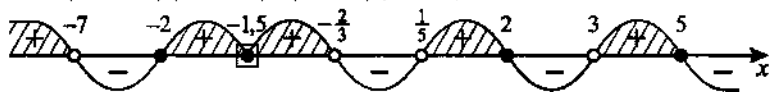
$$15x^2 + 7x - 2 = 15 \left(x + \frac{2}{3}\right) \left(x - \frac{1}{5}\right) = (3x + 2)(5x - 1).$$

$$\text{г) } 3x^2 + 12x - 63 = 0;$$

$$x^2 + 4x - 21 = 0;$$

$$-3x^2 - 12x + 63 = -3(x + 7)(x - 3).$$

$$\frac{(2x + 3)(x - 5)(2x + 3)(x + 2)(x - 2)}{-(3x + 2)(5x - 1)3(x + 7)(x - 3)} \geq 0$$

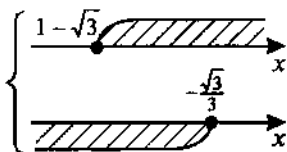


$$\text{Ответ: } (-\infty; -7) \cup \left[-2; -\frac{2}{3}\right] \cup \left(\frac{1}{5}; 2\right] \cup (3; 5].$$

$$4. \quad \begin{cases} (1 - \sqrt{3})x \leq (\sqrt{3} - 1)^2, \\ \sqrt{243}x + 9 \leq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} (1 - \sqrt{3})x \leq (\sqrt{3} - 1)^2, \\ 9\sqrt{3}x + 9 \leq 0. \end{cases}$$

$$1 - \sqrt{3} < 0, \text{ тогда } \begin{cases} x \geq 1 - \sqrt{3}, \\ x \leq -\frac{1}{\sqrt{3}}. \end{cases}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{3}} - (1 - \sqrt{3}) = \frac{-1 - \sqrt{3} + 3}{\sqrt{3}} = \frac{2 - \sqrt{3}}{\sqrt{3}} \geq 0.$$



$$\text{Ответ: } \left[1 - \sqrt{3}; -\frac{\sqrt{3}}{3}\right].$$

$$5. \frac{x+40}{x^3-16x} : \left(\frac{x-4}{3x^2+11x-4} - \frac{16}{16-x^2} \right) \leq 0.$$

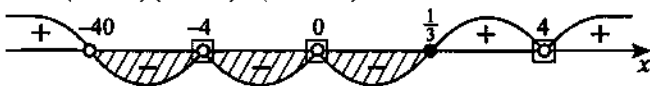
$$3x^2+11x-4=0;$$

$$x_{1,2} = \frac{-11 \pm \sqrt{121+48}}{6} = \frac{-11 \pm 13}{6}; \quad \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ x = -4. \end{cases}$$

$$3x^2+11x-4 = 3(x+4) \left(x - \frac{1}{3} \right) = (x+4)(3x-1).$$

$$\begin{aligned} \frac{x-4}{(x+4)(3x-1)} - \frac{16}{(4-x)(x+4)} &= \frac{(x-4)^2 + 16(3x-1)}{(x+4)(x-4)(3x-1)} = \\ &= \frac{x^2 - 8x + 16 + 48x - 16}{(x+4)(x-4)(3x-1)} = \frac{x(x+40)}{(x+4)(x-4)(3x-1)}, \text{ тогда} \\ \frac{x+40}{x(x+4)(x-4)} : \frac{x(x+40)}{(x+4)(x-4)(3x-1)} &\leq 0; \end{aligned}$$

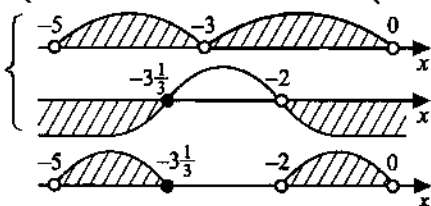
$$\frac{(x+40)(x+4)(x-4)(3x-1)}{x(x+4)(x-4)x(x+40)} \leq 0.$$



$$\text{Ответ: } (-40; -4) \cup (-4; 0) \cup \left(0; \frac{1}{3}\right).$$

$$6. \begin{cases} x^2+5x < 0, \\ \frac{x^2+9x+18}{-x^2-5x-6} \leq 2; \end{cases} \quad \begin{cases} x(x+5) < 0, \\ \frac{(x+3)(x+6)}{-(x+3)(x+2)} \leq 2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(x+5) < 0, \\ x \neq -3, \\ \frac{-x-6-2x-4}{x+2} \leq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x(x+5) < 0, \\ x \neq -3, \\ \frac{-3x-10}{x+2} \leq 0. \end{cases}$$

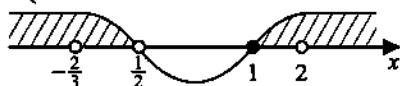


$$\text{Ответ: } \left(-5; -3\frac{1}{3}\right] \cup (-2; 0).$$

$$7. \frac{9x^2 - 4}{2x^2 - 5x + 2} \cdot \frac{x - 2}{3x + 2} + \frac{x}{1 - 2x} \geq 0.$$

$$\frac{(3x + 2)(3x - 2)(x - 2)}{(2x - 1)(x - 2)(3x + 2)} - \frac{x}{2x - 1} \geq 0;$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2x - 1}(3x - 2 - x) \geq 0, \\ x \neq -\frac{2}{3}, \\ x \neq 2; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{2(x - 1)}{2x - 1} \geq 0, \\ x \neq -\frac{2}{3}, \\ x \neq 2. \end{cases}$$



$$\text{Ответ: } \left(-\infty; -\frac{2}{3}\right) \cup \left(-\frac{2}{3}; \frac{1}{2}\right) \cup [1; 2) \cup (2; \infty).$$

$$8. \frac{(3x^2 - x - 24)(36 - 12x + x^2)}{(27 + 3x - 2x^2)(2x^2 + 2x - 24)} \leq 0.$$

$$a) 3x^2 - x - 24 = 0;$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 288}}{6} = \frac{1 \pm 17}{6}; \quad \begin{cases} x = 3 \\ x = -\frac{8}{3}; \end{cases}$$

$$3x^2 - x - 24 = 3(x - 3)\left(x + \frac{8}{3}\right) = (x - 3)(3x + 8).$$

$$6) 36 - 12x + x^2 = (6 - x)^2 = (x - 6)^2.$$

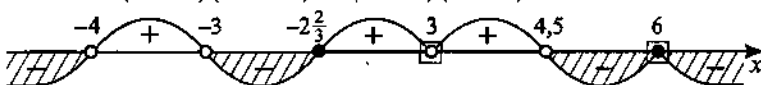
$$в) -2x^2 + 3x + 27 = 0;$$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 216}}{4} = \frac{3 \pm 15}{4}; \quad \begin{cases} x = 4,5 \\ x = -3; \end{cases}$$

$$-2x^2 + 3x + 27 = -2(x + 3)(x - 4,5) = -(x + 3)(2x - 9).$$

$$г) 2x^2 + 2x - 24 = 2(x^2 + x - 12) = 2(x + 4)(x - 3).$$

$$\text{Тогда } \frac{(x - 3)(3x + 8)(x - 6)^2}{-(x + 3)(2x - 9) \cdot 2(x + 4)(x - 3)} \leq 0.$$



$$\text{Ответ: } (-\infty; -4) \cup \left(-3; -2\frac{2}{3}\right] \cup (4,5; \infty).$$

$$9. \frac{3-x}{2x^2-11x+5} \leq \frac{3-x}{2x^2+15x+25}.$$

$$(3-x) \left(\frac{1}{2x^2-11x+5} - \frac{1}{2x^2+15x+25} \right) \leq 0.$$

$$a) 2x^2 - 11x + 5 = 0;$$

$$x_{1,2} = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 40}}{4} = \frac{11 \pm 9}{4}; \quad \begin{cases} x = 5 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases};$$

$$2x^2 - 11x + 5 = 2(x-5) \left(x - \frac{1}{2} \right) = (x-5)(2x-1).$$

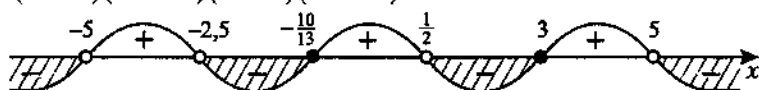
$$6) 2x^2 + 15x + 25 = 0;$$

$$x_{1,2} = \frac{-15 \pm \sqrt{225 - 200}}{4} = \frac{-15 \pm 5}{4}; \quad \begin{cases} x = -5 \\ x = -\frac{5}{2} \end{cases};$$

$$2x^2 + 15x + 25 = 2(x+5) \left(x + \frac{5}{2} \right) = (x+5)(2x+5).$$

$$(3-x) \frac{(2x^2+15x+25-2x^2+11x-5)}{(x-5)(2x-1)(x+5)(2x+5)} \leq 0.$$

$$\frac{(3-x)(26x+20)}{(x-5)(2x-1)(x+5)(2x+5)} \leq 0.$$



$$\text{Ответ: } (-\infty; -5) \cup \left(-2,5; -\frac{10}{13} \right] \cup \left(\frac{1}{2}; 3 \right] \cup (5; \infty).$$

$$10. \frac{x^4 - x^2 - 2x - 1}{x^2 - (2 - \sqrt{7})x - 2\sqrt{7}} \leq 0.$$

$$a) x^2 - (2 - \sqrt{7})x - 2\sqrt{7} = 0;$$

$$x_{1,2} = \frac{2 - \sqrt{7} \pm \sqrt{(2 - \sqrt{7})^2 + 8\sqrt{7}}}{2} = \frac{2 - \sqrt{7} \pm (2 + \sqrt{7})}{2};$$

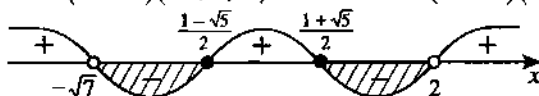
$$\begin{cases} x = 2 \\ x = -\sqrt{7} \end{cases}; \quad x^2 - (2 - \sqrt{7})x - 2\sqrt{7} = (x-2)(x+\sqrt{7}).$$

$$\begin{aligned} \text{б) } x^4 - x^2 - 2x - 1 &= (x^2)^2 - (x+1)^2 = \\ &= (x^2 - x - 1)(x^2 + x + 1). \end{aligned}$$

$$x^2 - x - 1 = 0; \quad \begin{cases} x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \\ x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}; \end{cases}$$

$$x^2 + x + 1 > 0 \quad (\text{при всех } x).$$

$$\frac{(x^2 - x - 1)(x^2 + x + 1)}{(x - 2)(x + \sqrt{7})} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(x^2 - x - 1)}{(x - 2)(x + \sqrt{7})} \leq 0.$$



$$\text{Ответ: } \left(-\sqrt{7}; \frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[\frac{1 + \sqrt{5}}{2}; 2\right).$$

Проверочная работа 3

$$1. \frac{3x+7}{5-x^2} \cdot (x-3)^2 \geq 0.$$

$$2. \frac{(3x - \sqrt{11})((\sqrt{3} - 2)x - (2 - \sqrt{3})^2)}{(\sqrt{2} - x)(\sqrt{32}x + 4)} \leq 0.$$

$$3. \frac{(6x^2 - 5x - 1)(16x^2 + 2x - 5)}{(9x^2 + 6x + 1)(-2x^2 + x + 3)} \leq 0.$$

$$4. \frac{2x+3}{12-x-x^2} + 0,5 \geq 0.$$

$$5. \frac{3x+9}{3x^2-4x+1} \geq \frac{6x+18}{6x^2+7x+1}.$$

$$6. (x^2 + 4x)^2 - 17(x^2 + 4x) + 60 \leq 0.$$

$$7. x(x+1)(x+2)(x+3) \geq 24.$$

$$8. \frac{1}{x+6} + \frac{7}{x-3} \leq \frac{5}{x-6}.$$

$$9. \left(\frac{1-x}{3x^2-4x+1} - \frac{x+1}{2x^2-3x-5} \right) (6x^2 - 17x + 5) \geq 0.$$

$$10. \frac{6}{x^2-2x} - \frac{12}{x^2+2x} \leq \frac{1}{x}.$$

2

Модульные неравенства

Свойства модульных неравенств

$$1. |\alpha| < \beta \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha < \beta, \\ \alpha > -\beta. \end{cases}$$

Известно, что $|a| = \begin{cases} a & \text{при } a \geq 0, \\ -a & \text{при } a < 0, \end{cases}$
т.е. это составное выражение.

Доказательство:

1) Пусть $\beta \leq 0$, следовательно $\alpha \in \emptyset$,
так как $|a| \geq 0$ (при всех a).

2) Пусть $\beta > 0$:

а) пусть $\alpha \geq 0$, следовательно $|\alpha| = \alpha$, тогда

$$\begin{cases} \alpha \geq 0, \\ |\alpha| < \beta, \\ \beta > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha \geq 0, \\ \alpha < \beta, \\ \beta > 0. \end{cases}$$



б) пусть $\alpha < 0$, следовательно $|\alpha| = -\alpha$, тогда

$$\begin{cases} \alpha < 0, \\ -\alpha < \beta, \\ \beta > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha < 0, \\ \alpha > -\beta, \\ \beta > 0. \end{cases}$$



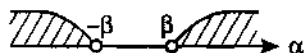
$(-\beta; 0)$; и, так как $(-\beta; 0) \cup [0; \beta) = (-\beta; \beta)$,



то $\begin{cases} \alpha < \beta \\ \alpha > -\beta, \end{cases}$ что и требовалось доказать, т.е.

$$|\alpha| < \beta \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha < \beta, \\ \alpha > -\beta. \end{cases}$$

$$2. |\alpha| > \beta \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha > \beta \\ \alpha < -\beta. \end{cases}$$



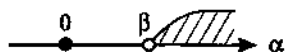
1) $\beta < 0$ $|\alpha| > \beta$ (при всех α);

2) $\beta = 0$ $|\alpha| > \beta$ (при всех α , кроме $\alpha = 0$);

3) $\beta > 0$

а) $\alpha \geq 0$, следовательно $|\alpha| = \alpha$, тогда

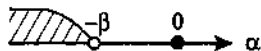
$$\begin{cases} \beta > 0, \\ \alpha \geq 0, \\ |\alpha| > \beta; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta > 0, \\ \alpha \geq 0, \\ \alpha > \beta. \end{cases}$$



$(\beta; +\infty)$;

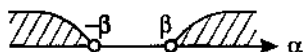
б) $\alpha < 0$, следовательно $|\alpha| = -\alpha$, тогда

$$\begin{cases} |\alpha| > \beta, \\ \alpha < 0, \\ \beta > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\alpha > \beta, \\ \alpha < 0, \\ \beta > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha < -\beta, \\ \alpha < 0, \\ \beta > 0. \end{cases}$$



$(-\infty; -\beta)$, значит $(-\infty; -\beta) \cup (\beta; +\infty)$,

$$\text{т.е. } |\alpha| > \beta \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha > \beta \\ \alpha < -\beta. \end{cases}$$



Примечание. При использовании I и II свойства равносильность не нарушается, даже если знак правой части отрицательный.

Действительно:

- а) Пусть $|\alpha| < \beta$ ($\beta < 0$) — очевидно, решения нет.

Если используется I свойство, то

$$|\alpha| < \beta \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha < \beta, \\ \alpha > -\beta \end{cases} \Leftrightarrow \alpha \in \emptyset,$$

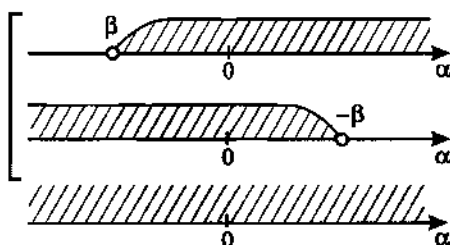
так как получается, что одно и то же число меньше нуля и одновременно больше его. Решения также нет.

- б) Пусть $|\alpha| > \beta$ ($\beta < 0$) — очевидно, решение есть любое α .

Если использовать II свойство, то

$$|\alpha| > \beta \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha > \beta \\ \alpha < -\beta \end{cases} \Leftrightarrow \alpha \in \mathbb{R}.$$

Действительно, объединяя два случая (число α больше отрицательного числа β и меньше положительного числа $(-\beta)$), получаем



и имеем решение $\alpha \in \mathbb{R}$.

Практикум 4

Рассмотрим на примерах, как используются свойства.

$$1. |x - 2| > 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 > 2 \\ x - 2 < -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 4 \\ x < 0. \end{cases}$$

Ответ: $(-\infty; 0) \cup (4; +\infty)$ — использовано II свойство.

$$2. |x + 2| < 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 < 2, \\ x + 2 > -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0, \\ x > -4. \end{cases}$$

Ответ: $(-4; 0)$ — использовано I свойство.

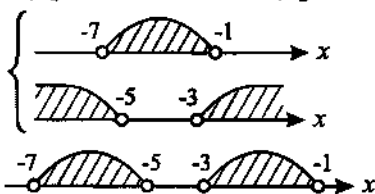
$$3. ||x + 4| - 2| < 1.$$

Вначале используем I свойство

$$\begin{cases} |x + 4| - 2 < 1, \\ |x + 4| - 2 > -1; \end{cases} \quad \begin{cases} |x + 4| < 3, \\ |x + 4| > 1; \end{cases}$$

а затем I и II свойства

$$\begin{cases} \begin{cases} x + 4 < 3, \\ x + 4 > -3, \\ x + 4 > 1 \\ x + 4 < -1; \end{cases} & \begin{cases} \begin{cases} x < -1, \\ x > -7, \\ x > -3 \\ x < -5; \end{cases} & \begin{cases} -7 < x < -1, \\ \begin{bmatrix} x > -3 \\ x < -5. \end{bmatrix} \end{cases} \end{cases}$$



Ответ: $(-7; -5) \cup (-3; -1)$.

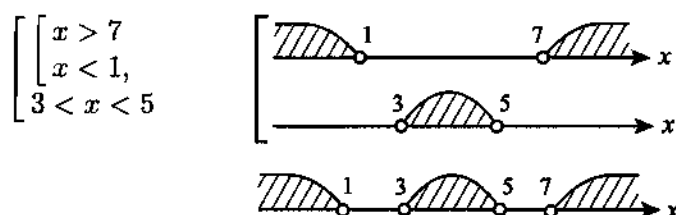
$$4. ||x - 4| - 2| > 1.$$

Сначала используем II свойство

$$\begin{cases} |x - 4| - 2 > 1 \\ |x - 4| - 2 < -1; \end{cases} \quad \begin{cases} |x - 4| > 3 \\ |x - 4| < 1. \end{cases}$$

Используем свойства I и II

$$\begin{cases} \begin{cases} x - 4 > 3 \\ x - 4 < -3, \\ \begin{cases} x - 4 < 1, \\ x - 4 > -1; \end{cases} \end{cases} & \begin{cases} \begin{cases} x > 7 \\ x < 1, \\ \begin{cases} x < 5, \\ x > 3; \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

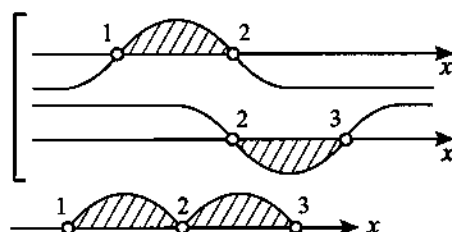


Ответ: $(-\infty; 1) \cup (3; 5) \cup (7; +\infty)$.

5. $\frac{1}{|2-x|} > 1;$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{1}{2-x} > 1 \\ \frac{1}{2-x} < -1; \end{array} \right. \quad \left[\begin{array}{l} \frac{1-2+x}{2-x} > 0 \\ \frac{1+2-x}{2-x} < 0; \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{x-1}{2-x} > 0 \\ \frac{3-x}{2-x} < 0. \end{array} \right.$$



Ответ: $(1; 2) \cup (2; 3)$.

6. $|x+2| - |x| > 0.$

$$|x+2| > |x|; \quad \left[\begin{array}{l} x+2 > |x| \\ x+2 < -|x|; \end{array} \right. \quad \left[\begin{array}{l} |x| < x+2 \\ |x| < -x-2; \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < x+2, \\ x > -x-2 \end{cases} \\ \begin{cases} x < -x-2, \\ x > x+2; \end{cases} \end{array} \right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < 2, \\ x > -x-2 \end{cases} \\ \begin{cases} x < -1, \\ 0 > 2; \end{cases} \end{array} \right. \quad x > -1.$$

Ответ: $(-1; \infty)$.

Но можно решать иначе.

$|x+2| > |x|$, так как обе части неравенства неотрицательны, можно возвести их в квадрат, не нарушая равносильности.

$$|x+2| > |x| \Leftrightarrow (|x+2|)^2 > (|x|)^2;$$

$$(x+2)^2 - x^2 > 0.$$

Очевидно, что $|x|^2 = x^2$.

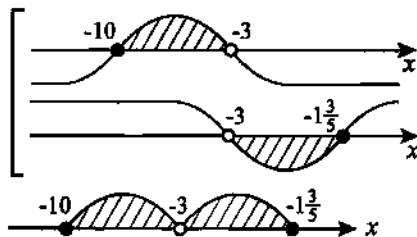
$$(x+2+x)(x+2-x) > 0; \quad 2(x+1) \cdot 2 > 0 \Leftrightarrow x > -1.$$

Ответ: $(-1; +\infty)$.

$$7. \quad \left| \frac{2x-1}{x+3} \right| \geq 3.$$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{2x-1}{x+3} \geq 3 \\ \frac{2x-1}{x+3} \leq -3; \end{array} \right. \quad \left[\begin{array}{l} \frac{2x-1-3(x+3)}{x+3} \geq 0 \\ \frac{2x-1+3(x+3)}{x+3} \leq 0; \end{array} \right.$$

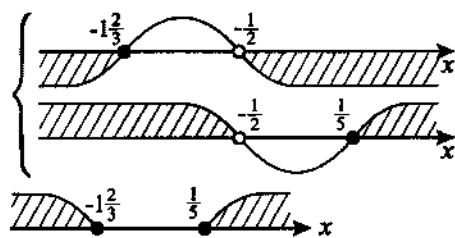
$$\left[\begin{array}{l} \frac{-x-10}{x+3} \geq 0 \\ \frac{5x+8}{x+3} \leq 0. \end{array} \right.$$



$$\text{Ответ: } [-10; -3) \cup \left(-3; -1\frac{3}{5}\right].$$

$$8. \quad \left| \frac{x-3}{2x+1} \right| \leq 2.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x-3}{2x+1} \leq 2, \\ \frac{x-3}{2x+1} \geq -2; \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{x-3-4x-2}{2x+1} \leq 0, \\ \frac{x-3+4x+2}{2x+1} \geq 0; \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{-3x-5}{2x+1} \leq 0, \\ \frac{5x-1}{2x+1} \geq 0. \end{array} \right.$$



Ответ: $\left(-\infty; -1\frac{2}{3}\right] \cup \left[\frac{1}{5}; +\infty\right)$.

9. $\frac{x^2 - |x| - 12}{x - 3} \geq 2x.$

По определению $|x| = \begin{cases} x & \text{при } x \geq 0, \\ -x & \text{при } x < 0. \end{cases}$

$$\frac{x^2 - |x| - 12}{x - 3} \geq 2x \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x \geq 0, \\ \frac{x^2 - x - 12}{x - 3} \geq 2x \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0, \\ \frac{x^2 + x - 12}{x - 3} \geq 2x; \end{cases} \end{cases}$$

$$x^2 + x - 12 = (x + 4)(x - 3);$$

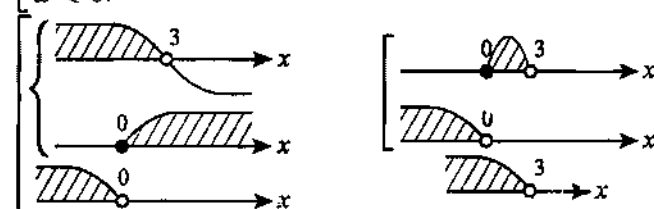
$$\frac{(x + 4)(x - 3)}{x - 3} \geq 2x; \text{ сократим на } (x - 3):$$

$$\begin{cases} \begin{cases} x \geq 0, \\ \frac{x^2 - x - 12 - 2x^2 + 6x}{x - 3} \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0, \\ x + 4 \geq 2x, \\ x \neq 3; \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{cases} x \geq 0, \\ \frac{-x^2 + 5x - 12}{x - 3} \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0, \\ x \leq 4; \end{cases} \end{cases}$$

$x^2 - 5x + 12 > 0$ (при всех x), так как $\begin{cases} a = 1 > 0, \\ D = -23 < 0. \end{cases}$

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ \frac{-1}{x-3} \geq 0 \\ x < 0. \end{cases}$$



Ответ: $(-\infty; 3)$.

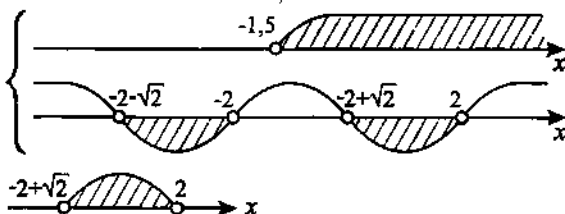
10. $|x^2 + 2x - 1| < 2x + 3$.

а) Решать это неравенство по определению модуля можно, но технически весьма сложно. Нужно учесть, что если правая часть больше нуля, то обе части неравенства можно возвести в квадрат, а если правая часть меньше нуля, то решения нет, т.е.

$$|\alpha| < \beta \Leftrightarrow \begin{cases} \beta > 0, \\ \alpha^2 < \beta^2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 3 > 0, \\ (|x^2 + 2x - 1|)^2 < (2x + 3)^2; \\ x > -1,5, \\ (x^2 + 2x - 1 + 2x + 3)(x^2 + 2x - 1 - 2x - 3) < 0; \\ x > -1,5, \\ (x^2 + 4x + 2)(x^2 - 4) < 0. \end{cases}$$

$$x^2 + 4x + 2 = 0; \quad x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{2}.$$



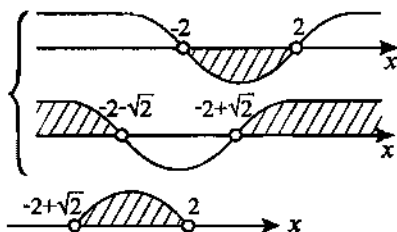
Ответ: $(-2 + \sqrt{2}; 2)$.

- б) Второй способ решения — используем I свойство модульных неравенств.

$$|x^2 + 2x - 1| < 2x + 3;$$

$$\begin{cases} x^2 + 2x - 1 < 2x + 3, \\ x^2 + 2x - 1 > -2x - 3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 4 < 0, \\ x^2 + 4x + 2 > 0. \end{cases}$$



Ответ: $(-2 + \sqrt{2}; 2)$.

11. а) $|x^2 - 2x - 1| > 2x - 3$.

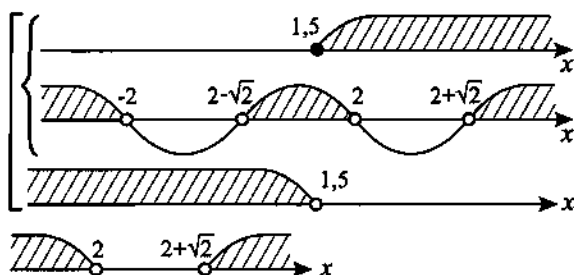
так как $|\alpha| > \beta \Leftrightarrow \begin{cases} \beta \geq 0, \\ \alpha^2 > \beta^2 \\ \beta < 0, \\ \forall \alpha. \end{cases}$

$$|x^2 - 2x - 1| > 2x - 3 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2x - 3 \geq 0, \\ (x^2 - 2x - 1)^2 > (2x - 3)^2 \\ 2x - 3 < 0, \\ \forall x; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 1,5, \\ (x^2 - 2x - 1 + 2x - 3)(x^2 - 2x - 1 - 2x + 3) > 0 \\ x < 1,5; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 1,5, \\ (x^2 - 4)(x^2 - 4x + 2) > 0 \\ x < 1,5. \end{cases}$$

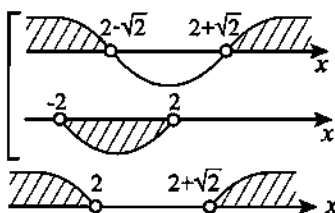


Ответ: $(-\infty; 2) \cup (2 + \sqrt{2}; +\infty)$.

- б) Второй способ решения — используем II свойство модульных неравенств.

$$|x^2 - 2x - 1| > 2x - 3;$$

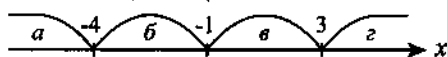
$$\begin{cases} x^2 - 2x - 1 > 2x - 3 \\ x^2 - 2x - 1 < -2x + 3; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - 4x + 2 > 0 \\ x^2 - 4 < 0. \end{cases}$$



Ответ: $(-\infty; 2) \cup (2 + \sqrt{2}; +\infty)$.

12. $2|x - 3| - |x + 4| > |x + 1| + 2$.

Найдем корни модулей: $|x - 3| = 0$, $x = 3$; $|x + 4| = 0$, $x = -4$; $|x + 1| = 0$, $x = -1$.



Для решения такого неравенства рассмотрим его на каждом интервале отдельно. Корни модулей разбивают числовую ось на интервалы. Учитывая значения подмодульных выражений, раскроем значения модулей на каждом интервале.

$$\text{а) } \begin{cases} x < -4, & \begin{cases} x + 4 < 0 & |x + 4| = -x - 4 \\ x + 1 < 0 & |x + 1| = -x - 1 \\ x - 3 < 0 & |x - 3| = 3 - x \end{cases} \\ 2(3 - x) - (-x - 4) > -(x + 1) + 2; \end{cases}$$

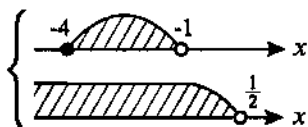
$$\begin{cases} x < -4, \\ 6 - 2x + x + 4 > -x - 1 + 2; \end{cases} \quad \begin{cases} x < -4, \\ 10 > 1. \end{cases}$$

$$(-\infty; -4).$$

$$б) \begin{cases} x \geq -4, \\ x < -1, \\ 2(3 - x) - (x + 4) > -x - 1 + 2; \end{cases} \quad \begin{cases} x + 4 \geq 0 & |x + 4| = x + 4 \\ x + 1 < 0 & |x + 1| = -x - 1 \\ x - 3 < 0 & |x - 3| = 3 - x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -4, \\ x < -1, \\ 6 - 2x - x - 4 > -x + 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -4, \\ x < -1, \\ -2x > -1; \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq -4, \\ x < -1, \\ x < \frac{1}{2}. \end{cases}$$



$$[-4; -1).$$

$$в) \begin{cases} x \geq -1, \\ x < 3, \\ 2(3 - x) - (x + 4) > x + 1 + 2; \end{cases} \quad \begin{cases} x + 1 \geq 0 & |x + 1| = x + 1 \\ x - 3 < 0 & |x - 3| = 3 - x \\ x + 4 > 0 & |x + 4| = x + 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -1, \\ x < 3, \\ 6 - 2x - x - 4 > x + 3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -1, \\ x < 3, \\ -4x > 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq -1, \\ x < 3, \\ x < -\frac{1}{4}. \end{cases}$$

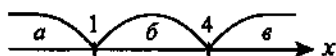
$$\left[-1; -\frac{1}{4}\right).$$

$$\begin{aligned}
 \text{г)} \quad & \begin{cases} x \geq 3, \begin{cases} x-3 \geq 0 & |x-3| = x-3 \\ x+4 > 0 & |x+4| = x+4 \\ x+1 > 0 & |x+1| = x+1 \end{cases} \\ 2(x-3) - (x+4) > x+1+2; \end{cases} \\
 & \begin{cases} x \geq 3, \\ 2x-6-x-4 > x+3; \end{cases} \\
 & \begin{cases} x \geq 3, \\ -10 > 3; \end{cases} \quad \text{нет решений.}
 \end{aligned}$$

Объединяя все решения, имеем $\left(-\infty; -\frac{1}{4}\right)$.

Ответ: $\left(-\infty; -\frac{1}{4}\right)$.

$$13. \frac{3x-2}{|x-1|+|x-4|} \geq 2.$$

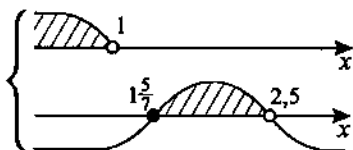


$$\text{а)} \quad \begin{cases} x < 1, \begin{cases} x-1 < 0 & |x-1| = 1-x \\ x-4 < 0 & |x-4| = 4-x \end{cases} \\ \frac{3x-2}{1-x+4-x} \geq 2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 1, \\ \frac{3x-2}{-2x+5} \geq 2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 1, \\ \frac{3x-2+4x-10}{5-2x} \geq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 1, \\ \frac{7x-12}{5-2x} \geq 0. \end{cases}$$



Решений нет.

$$6) \begin{cases} x \geq 1, \begin{pmatrix} x-1 \geq 0 & |x-1| = x-1 \\ x < 4, & \begin{pmatrix} x-4 < 0 & |x-4| = 4-x \end{pmatrix} \\ \frac{3x-2}{x-1+4-x} \geq 2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 1, \\ x < 4, \\ \frac{3x-2}{3} \geq 2; \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 1, \\ x < 4, \\ 3x-2 \geq 6; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 1, \\ x < 4, \\ x \geq \frac{8}{3}. \end{cases}$$

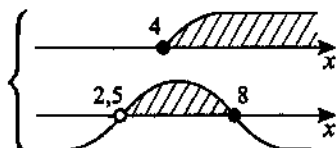


$$\left[2\frac{2}{3}; 4\right).$$

$$в) \begin{cases} x \geq 4, \begin{pmatrix} x-4 \geq 0 & |x-4| = x-4 \\ x-1 > 0 & |x-1| = x-1 \end{pmatrix} \\ \frac{3x-2}{x-1+x-4} \geq 2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 4, \\ \frac{3x-2}{2x-5} \geq 2; \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 4, \\ \frac{3x-2-4x+10}{2x-5} \geq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 4, \\ \frac{8-x}{2x-5} \geq 0. \end{cases}$$



$$[4; 8].$$

Объединяя все решения, имеем

$$\left[2\frac{2}{3}; 4\right) \cup [4; 8] = \left[2\frac{2}{3}; 8\right].$$

Ответ: $\left[2\frac{2}{3}; 8\right].$

Итак, осмысливая практикум, отметим свойства, которые полезно иметь в виду при решении модульных неравенств.

$$\text{I. } |\alpha| < \beta \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha < \beta, \\ \alpha > -\beta. \end{cases}$$

$$\text{II. } |\alpha| > \beta \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha > \beta \\ \alpha < -\beta. \end{cases}$$

$$\text{III. } |\alpha| < \beta \Leftrightarrow \begin{cases} \beta > 0, \\ \alpha^2 < \beta^2 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} \beta > 0, \\ (\alpha - \beta)(\alpha + \beta) < 0. \end{cases}$$

$$\text{IV. } |\alpha| > \beta \Leftrightarrow \begin{cases} \beta \geq 0, \\ \alpha^2 > \beta^2 \\ \beta < 0, \\ \forall \alpha \end{cases} \text{ или } \begin{cases} \beta \geq 0, \\ (\alpha - \beta)(\alpha + \beta) > 0 \\ \beta < 0, \\ \forall \alpha. \end{cases}$$

$$\text{V. } |\alpha| > |\beta| \Leftrightarrow \alpha^2 > \beta^2.$$

$$\text{VI. } |\alpha| < |\beta| \Leftrightarrow \alpha^2 < \beta^2.$$

Тренировочная работа 6

Решите неравенство.

1. $|x^2 + 5x| < 6$.

2. $|x^2 - 5x| \geq 6$.

3. $\frac{|x+3| - 2}{x+2} \geq 2$.

4. $\frac{|x-3| - 1}{|x| - 1} \leq 2$.

5. $x^2 - |3x + 2| + x \geq 0$.

6. $\frac{|x^2 - x - 12|}{x - 3} \geq 2x$.

7. $\frac{x^2 + 9x + 18}{|x^2 + 5x| - 6} \leq 2$.

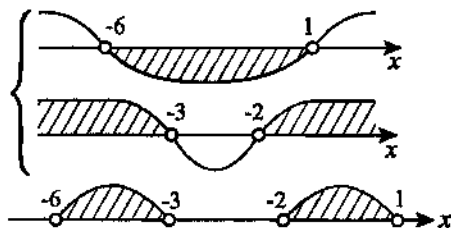
8. $\frac{4x^2 + 13x + 10}{|4x + 5|} \geq \frac{1}{2x + 3}$.

9. $|x + 3| + 2|x - 1| \leq |x| + 7$.

Решение тренировочной работы 6

$$1. |x^2 + 5x| < 6. \quad \begin{cases} x^2 + 5x < 6, \\ x^2 + 5x > -6; \end{cases}$$

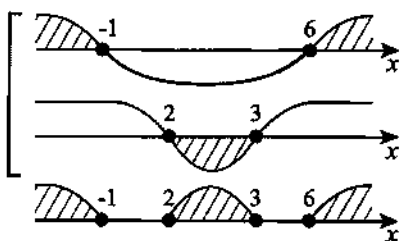
$$\begin{cases} x^2 + 5x - 6 < 0, \\ x^2 + 5x + 6 > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} (x+6)(x-1) < 0, \\ (x+2)(x+3) > 0. \end{cases}$$



Ответ: $(-6; -3) \cup (-2; 1)$.

$$2. |x^2 - 5x| \geq 6. \quad \begin{cases} x^2 - 5x \geq 6 \\ x^2 - 5x \leq -6; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 5x - 6 \geq 0 \\ x^2 - 5x + 6 \leq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} (x-6)(x+1) \geq 0 \\ (x-2)(x-3) \leq 0. \end{cases}$$

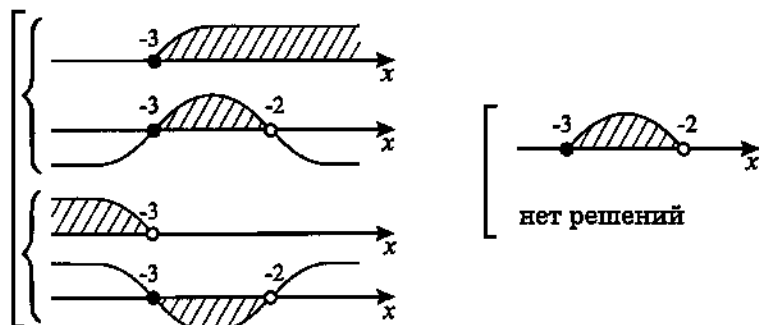


Ответ: $(-\infty; -1] \cup [2; 3] \cup [6; \infty)$.

$$3. \frac{|x+3|-2}{x+2} \geq 2.$$

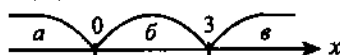
$$\left[\begin{cases} x+3 \geq 0, \\ \frac{x+3-2}{x+2} \geq 2, \\ x+3 < 0, \\ \frac{-x-3-2}{x+2} \geq 2; \end{cases} \right] \quad \left[\begin{cases} x \geq -3, \\ \frac{x+1}{x+2} \geq 2 \\ x < -3, \\ \frac{-x-5}{x+2} \geq 2; \end{cases} \right]$$

$$\left[\begin{cases} x \geq -3, \\ \frac{x+1-2x-4}{x+2} \geq 0 \\ x < -3, \\ \frac{2x+4+x+5}{x+2} \leq 0; \end{cases} \right. \quad \left[\begin{cases} x \geq -3, \\ \frac{-(x+3)}{x+2} \geq 0 \\ x < -3, \\ \frac{3(x+3)}{x+2} \leq 0. \end{cases} \right.$$



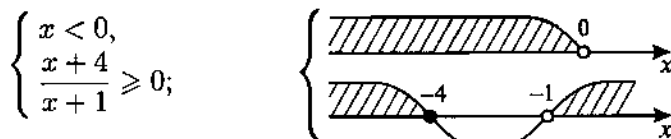
Ответ: $[-3; -2)$.

4. $\frac{|x-3|-1}{|x|-1} \leq 2.$



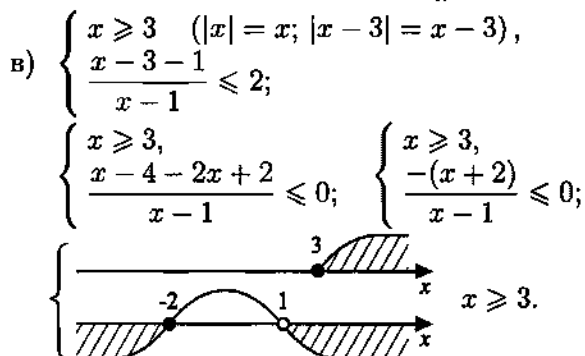
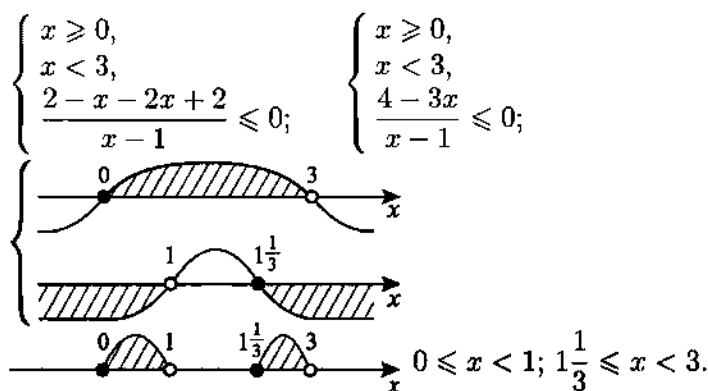
а) $\begin{cases} x < 0 & (|x| = -x; \quad |x-3| = 3-x), \\ \frac{3-x-1}{-x-1} \leq 2; \end{cases}$

$$\begin{cases} x < 0, \\ \frac{2-x+2x+2}{-x-1} \leq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x < 0, \\ \frac{4+x}{-(x+1)} \leq 0; \end{cases}$$



$$-1 < x < 0, \quad x \leq -4.$$

б) $\begin{cases} x \geq 0 & (|x| = x), \\ x < 3 & (|x-3| = 3-x), \\ \frac{3-x-1}{x-1} \leq 2; \end{cases}$

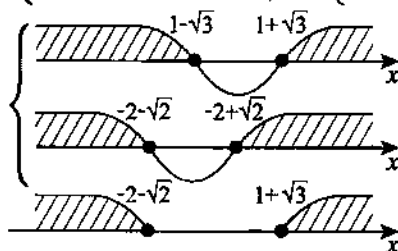


Ответ: $(-\infty; -4] \cup (-1; 1) \cup \left[1\frac{1}{3}; \infty\right).$

5. $x^2 - |3x+2| + x \geq 0. \quad |3x+2| \leq x^2 + x,$

учитывая свойство $|\alpha| < \beta \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha < \beta, \\ \alpha > -\beta, \end{cases}$

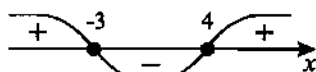
$$\left\{ \begin{array}{l} 3x+2 \leq x^2+x, \\ 3x+2 \geq -x^2-x; \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x^2-2x-2 \geq 0, \\ x^2+4x+2 \geq 0; \end{array} \right.$$



Ответ: $(-\infty; -2-\sqrt{2}] \cup [1+\sqrt{3}; \infty).$

$$6. \frac{|x^2 - x - 12|}{x - 3} \geq 2x.$$

$$y = x^2 - x - 12.$$



$$\left[\begin{cases} x^2 - x - 12 \geq 0, \\ \frac{x^2 - x - 12}{x - 3} \geq 2x, \\ x^2 - x - 12 < 0, \\ -\frac{(x^2 - x - 12)}{x - 3} \geq 2x; \end{cases} \right.$$

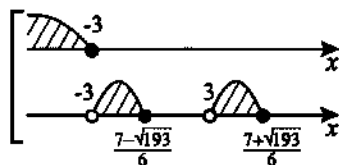
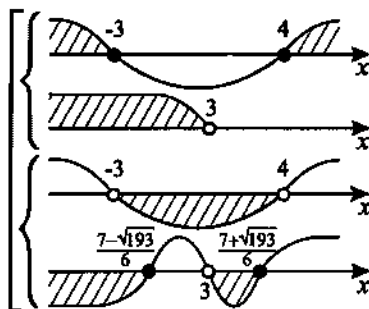
$$\left[\begin{cases} (x - 4)(x + 3) \geq 0, \\ \frac{2x^2 - 6x - x^2 + x + 12}{x - 3} \leq 0, \\ (x - 4)(x + 3) < 0, \\ \frac{2x^2 - 6x + x^2 - x - 12}{x - 3} \leq 0; \end{cases} \right.$$

$$\left[\begin{cases} (x - 4)(x + 3) \geq 0, \\ \frac{x^2 - 5x + 12}{x - 3} \leq 0, \\ (x - 4)(x + 3) < 0, \\ \frac{3x^2 - 7x - 12}{x - 3} \leq 0; \end{cases} \right.$$

$$\left[\begin{cases} (x - 4)(x + 3) \geq 0, \\ x < 3, \\ (x - 4)(x + 3) < 0, \\ \frac{3x^2 - 7x - 12}{x - 3} \leq 0, \end{cases} \right.$$

$x^2 - 5x + 12 > 0$ при всех x .

$$3x^2 - 7x - 12 = 0; \quad x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 144}}{6} = \frac{7 \pm \sqrt{193}}{6}.$$

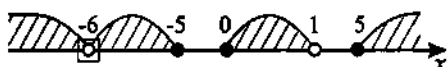


Ответ: $\left(-\infty; \frac{7 - \sqrt{193}}{6}\right] \cup \left(3; \frac{7 + \sqrt{193}}{6}\right]$.

$$7. \frac{x^2 + 9x + 18}{|x^2 + 5x| - 6} \leq 2.$$

$$a) \left\{ \begin{aligned} x^2 + 5x &\geq 0, \\ \frac{x^2 + 9x + 18}{x^2 + 5x - 6} &\leq 2; \end{aligned} \right\} \left\{ \begin{aligned} x(x + 5) &\geq 0, \\ \frac{x^2 + 9x + 18 - 2x^2 - 10x + 12}{x^2 + 5x - 6} &\leq 0; \end{aligned} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x(x+5) \geq 0, \\ \frac{-x^2 - x + 30}{x^2 + 5x - 6} \leq 0; \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x(x+5) \geq 0, \\ \frac{-(x+6)(x-5)}{(x+6)(x-1)} \leq 0. \end{array} \right.$$



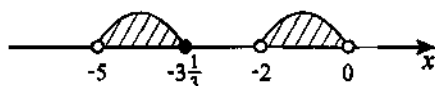
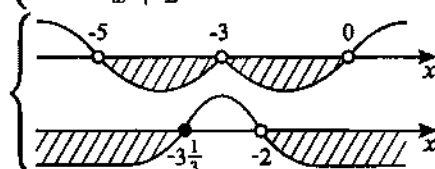
$$(-\infty; -6) \cup (-6; -5) \cup [0; 1) \cup [5; +\infty).$$

$$6) \left\{ \begin{array}{l} x^2 + 5x < 0, \\ \frac{x^2 + 9x + 18}{-x^2 - 5x - 6} \leq 2; \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x(x+5) < 0, \\ \frac{(x+3)(x+6)}{-(x+2)(x+3)} \leq 2; \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x(x+5) < 0, \\ x \neq -3, \\ \frac{-(x+6)}{x+2} \leq 2; \end{array} \right.$$

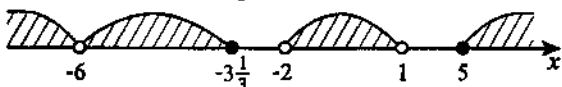
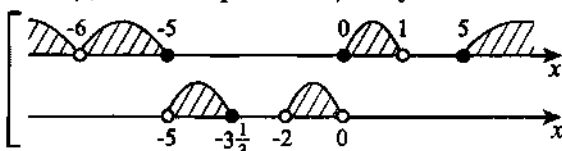
$$\left\{ \begin{array}{l} x(x+5) < 0, \\ x \neq -3, \\ \frac{-3x-10}{x+2} \leq 0. \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x(x+5) < 0, \\ x \neq -3, \\ \frac{-x-6-2x-4}{x+2} \leq 0; \end{array} \right.$$



$$\left(-5; -3\frac{1}{3} \right] \cup (-2; 0).$$

Объединяя оба решения, получим



$$\text{Ответ: } (-\infty; -6) \cup \left(-6; -3\frac{1}{3} \right] \cup (-2; 1) \cup [5; +\infty).$$

$$8. \frac{4x^2 + 13x + 10}{|4x + 5|} \geq \frac{1}{2x + 3}.$$

$$\left[\begin{cases} 4x + 5 > 0 & (|4x + 5| = 4x + 5), \\ \frac{4x^2 + 13x + 10}{4x + 5} \geq \frac{1}{2x + 3}, \\ 4x + 5 < 0 & (|4x + 5| = -4x - 5), \\ -\frac{4x^2 + 13x + 10}{4x + 5} \geq \frac{1}{2x + 3}. \end{cases} \right.$$

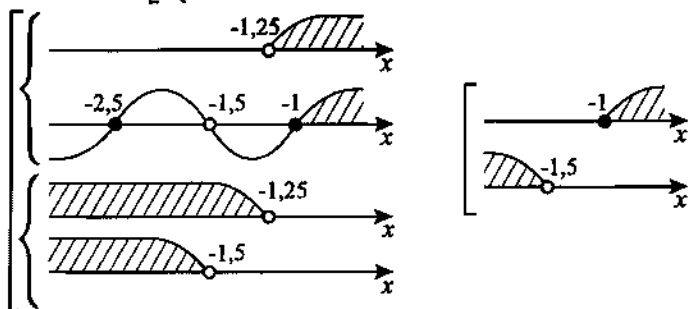
Так как $4x^2 + 13x + 10 = (4x + 5)(x + 2)$, то

$$\left[\begin{cases} x > -1,25, \\ x + 2 - \frac{1}{2x + 3} \geq 0, \\ x < -1,25, \\ \frac{1}{2x + 3} + x + 2 \leq 0; \end{cases} \right. \quad \left[\begin{cases} x > -1,25, \\ \frac{2x^2 + 7x + 5}{2x + 3} \geq 0, \\ x < -1,25, \\ \frac{2x^2 + 7x + 7}{2x + 3} \leq 0. \end{cases} \right.$$

$$2x^2 + 7x + 5 = (x + 1)(2x + 5).$$

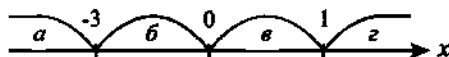
$$2x^2 + 7x + 7 > 0 \text{ (при всех } x), \text{ так как } \begin{cases} D = 49 - 56 < 0, \\ a = 2 > 0. \end{cases}$$

Поэтому $\left[\begin{cases} x > -1,25, \\ \frac{(x + 1)(2x + 5)}{2x + 3} \geq 0, \\ x < -1,25, \\ \frac{1}{2x + 3} \leq 0. \end{cases} \right.$



Ответ: $(-\infty; -1,5) \cup [-1; \infty)$.

$$9. |x+3| + 2|x-1| \leq |x| + 7.$$



$$а) \begin{cases} x < -3, & \begin{cases} |x+3| = -x-3 \\ |x| = -x \\ |x-1| = -x+1 \end{cases} \\ -x-3-2x+2 \leq -x+7; \\ \begin{cases} x < -3, \\ 2x \geq -8; \end{cases} & \begin{cases} x < -3, \\ x \geq -4; \end{cases} \quad [-4; -3). \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} -3 \leq x < 0, & \begin{cases} |x+3| = x+3 \\ |x| = -x \\ |x-1| = -x+1 \end{cases} \\ x+3-2x+2 \leq -x+7; \\ \begin{cases} -3 \leq x < 0, \\ 5 \leq 7; \end{cases} \quad [-3; 0). \end{cases}$$

$$в) \begin{cases} 0 \leq x < 1, & \begin{cases} |x+3| = x+3 \\ |x| = x \\ |x-1| = 1-x \end{cases} \\ x+3-2x+2 \leq x+7; \\ \begin{cases} 0 \leq x < 1, \\ 2x \geq -2; \end{cases} & \begin{cases} 0 \leq x < 1, \\ x \geq -1; \end{cases} \quad [0; 1). \end{cases}$$

$$г) \begin{cases} x \geq 1, & \begin{cases} |x+3| = x+3 \\ |x| = x \\ |x-1| = x-1 \end{cases} \\ x+3+2x-2 \leq x+7; \\ \begin{cases} x \geq 1, \\ 2x \leq 6; \end{cases} & \begin{cases} x \geq 1, \\ x \leq 3; \end{cases} \quad [1; 3]. \end{cases}$$

Объединяя все решения, получим: $[-4; 3]$.

Ответ: $[-4; 3]$.

Тренировочная работа 7
(Нахождение области определения)

Найдите область определения.

$$1. y = \sqrt{x^2 - 4x} + \frac{\sqrt{25 - x^2}}{x^2 - 1}.$$

$$2. y = \frac{\sqrt{\frac{12}{x} - x - 1}}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

$$3. y = \frac{\sqrt{|x| - 2}}{9 - x^2}.$$

$$4. y = \sqrt{|x + 1| - 1} + \sqrt{9 - |x|^2}.$$

$$5. y = \sqrt{\frac{x^2 - 5x + 4}{|x - 2| - 1}}.$$

$$6. y = \sqrt{-\frac{3x^2 + 2|x| - 5}{8x^2 - 6|x| + 1}}.$$

$$7. y = \sqrt{2 - \left| \frac{4x^2 - 9}{2x^2 - 5x + 3} \right|}.$$

$$8. y = \sqrt{\frac{|x^2 - x - 6|}{x + 3}} - 2x.$$

$$9. y = \sqrt{\frac{x^2 - 4|x| + 3}{|x + 2| - 1}}.$$

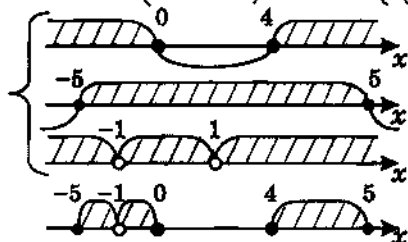
$$10. y = \sqrt{\frac{5x^2 - 6x + 1}{|5x - 1|}} - \frac{1}{2x - 3}.$$

Решение тренировочной работы 7

Найдите область определения.

$$1. y = \sqrt{x^2 - 4x} + \frac{\sqrt{25 - x^2}}{x^2 - 1}.$$

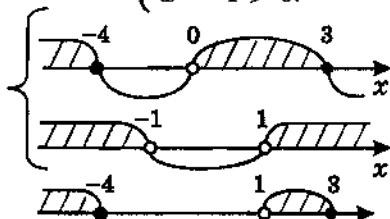
$$D(y): \begin{cases} x^2 - 4x \geq 0, \\ 25 - x^2 \geq 0, \\ x^2 - 1 \neq 0. \end{cases} \quad \begin{cases} x(x - 4) \geq 0, \\ (5 + x)(5 - x) \geq 0, \\ (x + 1)(x - 1) \neq 0; \end{cases}$$



$$\text{Ответ: } D(y) = [-5; -1) \cup (-1; 0] \cup [4; 5].$$

$$2. y = \frac{\sqrt{\frac{12}{x} - x - 1}}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

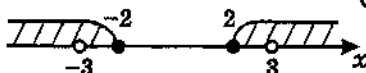
$$D(y): \begin{cases} \frac{12}{x} - x - 1 \geq 0, \\ x^2 - 1 > 0. \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{12 - x - x^2}{x} \geq 0, \\ (x + 1)(x - 1) > 0; \end{cases}$$



$$\text{Ответ: } D(y) = (-\infty; -4] \cup (1; 3].$$

$$3. y = \frac{\sqrt{|x| - 2}}{9 - x^2}.$$

$$D(y): \begin{cases} |x| - 2 \geq 0, \\ 9 - x^2 \neq 0. \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 2 \\ x \leq -2, \\ (3 + x)(3 - x) \neq 0; \end{cases}$$

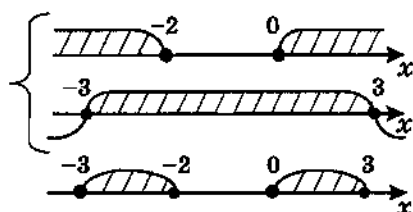


$$\text{Ответ: } D(y) = (-\infty; -3) \cup (-3; -2] \cup [2; 3) \cup (3; \infty).$$

$$4. y = \sqrt{|x+1|-1} + \sqrt{9-|x|^2}.$$

$$D(y): \begin{cases} |x+1|-1 \geq 0, \\ 9-|x|^2 \geq 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{cases} x+1 \geq 1 \\ x+1 \leq -1, \\ 9-x^2 \geq 0; \end{cases} & \begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq -2, \\ (3+x)(3-x) \geq 0; \end{cases} \end{cases}$$

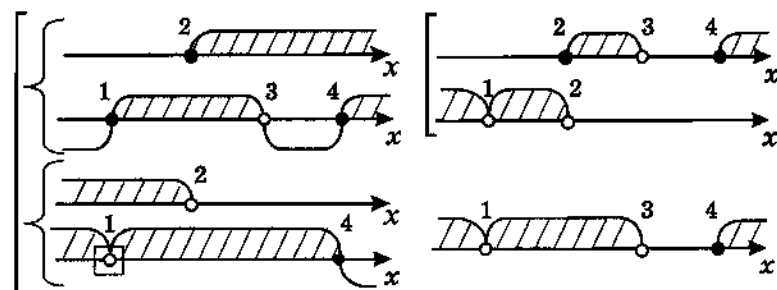


Ответ: $D(y) = [-3; -2] \cup [0; 3]$.

$$5. y = \sqrt{\frac{x^2 - 5x + 4}{|x-2|-1}}.$$

$$D(y): \frac{x^2 - 5x + 4}{|x-2|-1} \geq 0.$$

$$\begin{cases} \begin{cases} x \geq 2, \\ \frac{x^2 - 5x + 4}{x-2-1} \geq 0 \\ x < 2, \\ \frac{x^2 - 5x + 4}{2-x-1} \geq 0; \end{cases} & \begin{cases} \begin{cases} x \geq 2, \\ \frac{(x-1)(x-4)}{x-3} \geq 0 \\ x < 2, \\ \frac{(x-1)(x-4)}{1-x} \geq 0; \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$



Ответ: $D(y) = (-\infty; 1) \cup (1; 3) \cup [4; \infty)$.

$$6. \quad y = \sqrt{-\frac{3x^2 + 2|x| - 5}{8x^2 - 6|x| + 1}}.$$

$$D(y) : -\frac{3x^2 + 2|x| - 5}{8x^2 - 6|x| + 1} \geq 0.$$

Пусть $|x| = t$ ($t \geq 0$), тогда $x^2 = |x|^2 = t^2$, получим

$$-\frac{3t^2 + 2t - 5}{8t^2 - 6t + 1} \geq 0.$$

$$a) \quad 3t^2 + 2t - 5 = 0;$$

$$t_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+15}}{3} = \frac{-1 \pm 4}{3}; \quad \begin{cases} t = 1 \\ t = -\frac{5}{3}; \end{cases}$$

$$3t^2 + 2t - 5 = 3(t-1)\left(t + \frac{5}{3}\right).$$

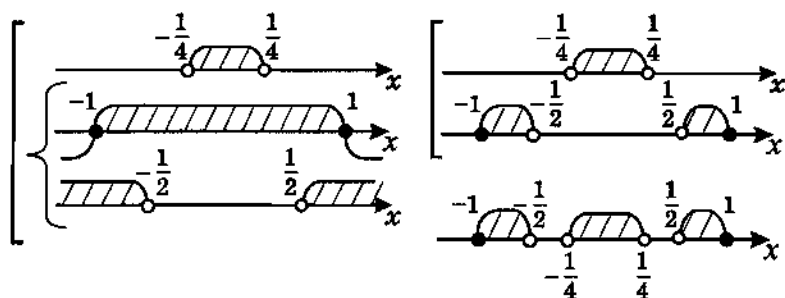
$$б) \quad 8t^2 - 6t + 1 = 0;$$

$$t_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{8} = \frac{3 \pm 1}{8}; \quad \begin{cases} t = \frac{1}{2} \\ t = \frac{1}{4}; \end{cases}$$

$$8t^2 - 6t + 1 = 8\left(t - \frac{1}{2}\right)\left(t - \frac{1}{4}\right).$$

$$-\frac{3(t-1)\left(t + \frac{5}{3}\right)}{8\left(t - \frac{1}{2}\right)\left(t - \frac{1}{4}\right)} \geq 0; \quad \begin{array}{c} -1\frac{2}{3} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{2} \quad 1 \\ \text{---} \bullet \quad \circ \quad \circ \quad \bullet \text{---} \\ t \end{array}$$

$$\left[\begin{cases} |x| < \frac{1}{4}, \\ |x| \geq -1\frac{2}{3} \\ |x| \leq 1, \\ |x| > \frac{1}{2}; \end{cases} \right] \quad \left[\begin{cases} x < \frac{1}{4}, \\ x > -\frac{1}{4} \\ x \leq 1, \\ x \geq -1, \\ \left[\begin{array}{l} x > \frac{1}{2} \\ x < -\frac{1}{2}; \end{array} \right] \end{cases} \right]$$



Ответ: $D(y) = \left[-1; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; 1\right]$.

7. $y = \sqrt{2 - \left| \frac{4x^2 - 9}{2x^2 - 5x + 3} \right|}$.

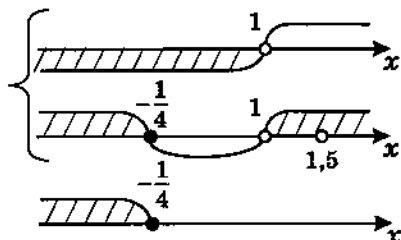
$D(y): 2 - \left| \frac{4x^2 - 9}{2x^2 - 5x + 3} \right| \geq 0$.

$2x^2 - 5x + 3 = 0; x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{4} = \frac{5 \pm 1}{4}; \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ x = 1; \end{cases}$

$2x^2 - 5x + 3 = 2(x - 1) \left(x - \frac{3}{2}\right) = (x - 1)(2x - 3)$.

$\left| \frac{(2x + 3)(2x - 3)}{(x - 1)(2x - 3)} \right| \leq 2; \begin{cases} \left| \frac{2x + 3}{x - 1} \right| \leq 2, \\ 2x - 3 \neq 0; \end{cases}$

$\begin{cases} \frac{2x + 3}{x - 1} \leq 2, \\ \frac{2x + 3}{x - 1} \geq -2, \\ x \neq 1, 5; \end{cases} \begin{cases} \frac{2x + 3 - 2x + 2}{x - 1} \leq 0, \\ \frac{2x + 3 + 2x - 2}{x - 1} \geq 0, \\ x \neq 1, 5; \end{cases} \begin{cases} \frac{5}{x - 1} \leq 0, \\ \frac{4x + 1}{x - 1} \geq 0, \\ x \neq 1, 5. \end{cases}$



Ответ: $D(y) = \left(-\infty; -\frac{1}{4}\right]$.

$$8. y = \sqrt{\frac{|x^2 - x - 6|}{x + 3}} - 2x.$$

$$D(y): \frac{|x^2 - x - 6|}{x + 3} - 2x \geq 0. \quad x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2).$$

$$\left[\begin{cases} x^2 - x - 6 \geq 0, \\ \frac{x^2 - x - 6}{x + 3} - 2x \geq 0 \\ x^2 - x - 6 < 0, \\ \frac{-x^2 + x + 6}{x + 3} - 2x \geq 0; \end{cases} \right.$$

$$\left[\begin{cases} (x - 3)(x + 2) \geq 0, \\ \frac{x^2 - x - 6 - 2x^2 - 6x}{x + 3} \geq 0 \\ (x - 3)(x + 2) < 0, \\ \frac{-x^2 + x + 6 - 2x^2 - 6x}{x + 3} \geq 0; \end{cases} \right.$$

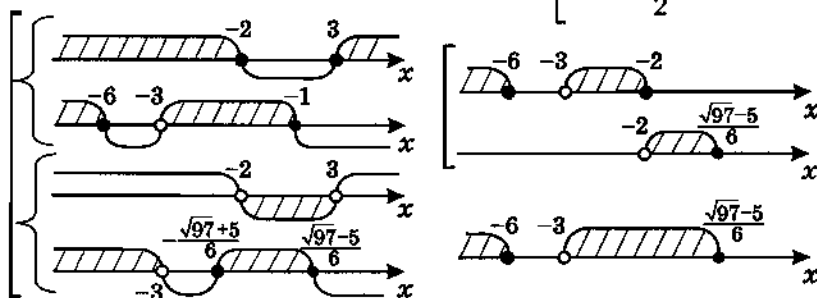
$$\left[\begin{cases} (x - 3)(x + 2) \geq 0, \\ \frac{-x^2 - 7x - 6}{x + 3} \geq 0 \\ (x - 3)(x + 2) < 0, \\ \frac{-3x^2 - 5x + 6}{x + 3} \geq 0. \end{cases} \right.$$

$$\text{a) } -x^2 - 7x - 6 = 0; \quad \begin{cases} x = -1 \\ x = -6; \end{cases}$$

$$-x^2 - 7x - 6 = -(x + 1)(x + 6).$$

$$\text{б) } -3x^2 - 5x + 6 = 0;$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 72}}{-6} = \frac{5 \pm \sqrt{97}}{-6}; \quad \begin{cases} x \approx \frac{5}{6} \\ x \approx -\frac{5}{2}. \end{cases}$$



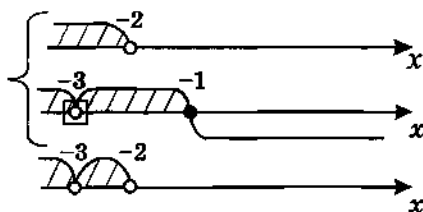
$$\text{Ответ: } D(y) = (-\infty; -6] \cup \left[-3; \frac{\sqrt{97} - 5}{6}\right].$$

$$9. y = \sqrt{\frac{x^2 - 4|x| + 3}{|x + 2| - 1}}.$$

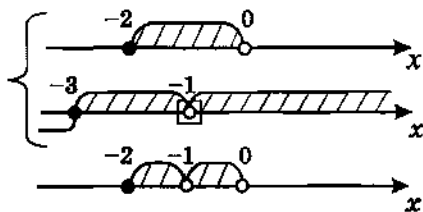
$$D(y): \frac{x^2 - 4|x| + 3}{|x + 2| - 1} \geq 0.$$

Рассмотрим неравенство на каждом интервале отдельно.

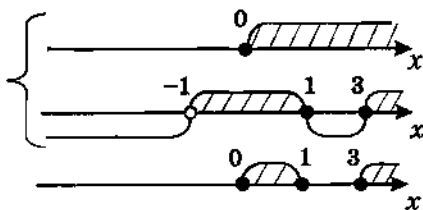
$$a) \begin{cases} x < -2, \\ \frac{x^2 + 4x + 3}{-x - 2 - 1} \geq 0; \end{cases} \begin{cases} x < -2, \\ -\frac{(x+1)(x+3)}{x+3} \geq 0. \end{cases}$$



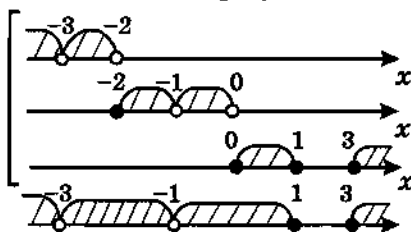
$$б) \begin{cases} x \geq -2, \\ x < 0, \\ \frac{x^2 + 4x + 3}{x + 2 - 1} \geq 0; \end{cases} \begin{cases} x \geq -2, \\ x < 0, \\ \frac{(x+1)(x+3)}{x+1} \geq 0; \end{cases}$$



$$в) \begin{cases} x \geq 0, \\ \frac{x^2 - 4x + 3}{x + 2 - 1} \geq 0; \end{cases} \begin{cases} x \geq 0, \\ \frac{(x-1)(x-3)}{x+1} \geq 0. \end{cases}$$



Объединяя все результаты, получим



Ответ: $D(y) = (-\infty; -3) \cup (-3; -1) \cup (-1; 1] \cup [3; \infty)$.

$$10. y = \sqrt{\frac{5x^2 - 6x + 1}{|5x - 1|} - \frac{1}{2x - 3}}.$$

$$D(y): \frac{5x^2 - 6x + 1}{|5x - 1|} - \frac{1}{2x - 3} \geq 0.$$

$$\left[\begin{cases} 5x - 1 > 0, \\ \frac{5x^2 - 6x + 1}{5x - 1} - \frac{1}{2x - 3} \geq 0 \end{cases} \right. \\ \left[\begin{cases} 5x - 1 < 0, \\ \frac{5x^2 - 6x + 1}{-(5x - 1)} - \frac{1}{2x - 3} \geq 0; \end{cases} \right.$$

$$\left[\begin{cases} x > \frac{1}{5}, \\ \frac{(5x - 1)(x - 1)}{5x - 1} - \frac{1}{2x - 3} \geq 0 \end{cases} \right. \\ \left[\begin{cases} x < \frac{1}{5}, \\ \frac{(5x - 1)(x - 1)}{-(5x - 1)} - \frac{1}{2x - 3} \geq 0; \end{cases} \right.$$

$$\left[\begin{cases} x > \frac{1}{5}, \\ x - 1 - \frac{1}{2x - 3} \geq 0 \end{cases} \right. \\ \left[\begin{cases} x < \frac{1}{5}, \\ 1 - x - \frac{1}{2x - 3} \geq 0; \end{cases} \right.$$

$$\left[\begin{cases} x > \frac{1}{5}, \\ \frac{2x^2 - 5x + 3 - 1}{2x - 3} \geq 0 \end{cases} \right. \\ \left[\begin{cases} x < \frac{1}{5}, \\ \frac{-2x^2 + 5x - 3 - 1}{2x - 3} \geq 0; \end{cases} \right.$$

$$\left[\begin{cases} x > \frac{1}{5}, \\ \frac{2x^2 - 5x + 2}{2x - 3} \geq 0 \end{cases} \right. \\ \left[\begin{cases} x < \frac{1}{5}, \\ \frac{-(2x^2 - 5x + 4)}{2x - 3} \geq 0; \end{cases} \right.$$

а) $2x^2 - 5x + 2 = 0;$

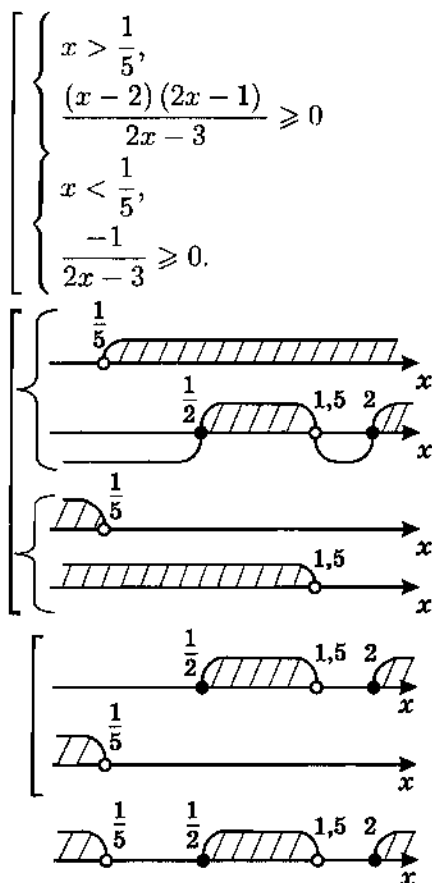
$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{4} = \frac{5 \pm 3}{4};$$

$$2x^2 - 5x + 2 = (x - 2)(2x - 1).$$

б) $2x^2 - 5x + 4 = 0;$

$$D < 0, \text{ значит, учитывая, что } \begin{cases} a = 2 > 0, \\ D < 0 \end{cases}$$

$$2x^2 - 5x + 4 > 0 \text{ (при всех } x).$$



Ответ: $D(y) = (-\infty; 0, 2) \cup [0, 5; 1, 5) \cup [2; \infty)$.

Проверочная работа 4

1. $|2x^2 - 9x + 15| \geq 20.$

2. $\frac{x^2 - |x| - 12}{x - 3} \geq 2x.$

3. $|x^2 + 3x - 15| < 2x^2 + x.$

4. $\frac{|x^2 + 5x + 6|}{x + 2} \leq \frac{4}{x}.$

5. $\frac{|x^2 - 4x| + 3}{x^2 + |x| + 5} \geq 1.$

6. $\frac{4x^2 + 5x + 1}{|4x + 1|} \geq \frac{1}{2x + 1}.$

7. $\frac{|4x^2 - 5x + 1|}{4x - 1} \leq \frac{1}{2|x| - 1}.$

8. $\frac{|x^2 - 5x| + 6}{|x - 3|x|} \geq 1,5.$

Проверочная работа 5

1. $\begin{cases} 3x^2 - 4x + 1 \geq 0, \\ 3x^2 - 5x + 2 \leq 0. \end{cases}$
2. $\begin{cases} (x^2 - 6|x| + 9)(|x| - 2) > 0, \\ x^2 - x - 20 \leq 0. \end{cases}$
3. $\begin{cases} x^2 - 7x - 18 \leq 0, \\ (x - 2)^2 - 4|x - 2| + 3 \geq 0. \end{cases}$
4. $\begin{cases} 10 \leq x^2 - 8x + 25 < 18, \\ 7 + 6|2x - 3| - (2x - 3)^2 \leq 0. \end{cases}$
5. $\begin{cases} \frac{x^2 - 9|x| + 14}{x - 3} \leq 0, \\ |x - 4|(|x + 3| - 8) < 0. \end{cases}$
6. $\begin{cases} \frac{2x^2 + 3}{x^2 - x} + \left| \frac{4x^2 + 6}{x^2 - x} \right| < 6, \\ |x - 1 - x^2| < |-x - x^2 + 15|. \end{cases}$
7. $\begin{cases} (x^2 - 3x + 2)(x^2 - 9x + 20) < 180, \\ \frac{4}{|x + 1| - 2} \geq |x - 1|. \end{cases}$
8. $\begin{cases} x^2 - x < \frac{36}{x^2 - x}, \\ \left(\frac{12x - 15}{2x^2 + x} - 1 \right) (x - |2x - 3|)(3 - x) \leq 0. \end{cases}$

3

Карточки заданий

Подготовительные карточки

Карточка 1

1. $\frac{1}{2-x} + \frac{5}{2+x} < 1.$

2. $\left(\frac{4x-5}{3x^2-x-14} + \frac{2}{x^2+2x} - \frac{1}{7x-3x^2} \right) \frac{x}{2x-3} \geq \frac{16-6x}{3x-7}.$

3. $\left| \frac{x^2-3x+2}{x^2-9} \right| \leq 1.$

4. $||x-5|-3| \geq 2.$

5. $\frac{|4-x|}{3+x} \leq 2.$

6. $|x-2| + |x-3| + |2x-8| < 9.$

Карточка 2

1. $\frac{x^4-2x^2-8}{x^2+2x+1} < 0.$

2. $\frac{4x+5}{4x+6} \geq \frac{x}{4x-10} \cdot \left(\frac{13}{2x^2-7x-15} + \frac{1}{5-x} + \frac{5}{2x^2+3x} \right)$

3. $\left| \frac{x^2-2x+1}{x-3} \right| > 1.$

4. $||x+6|-4| \leq 2.$

5. $\frac{|2x-1|}{x^2+x-2} \geq 3.$

6. $|x+2| + |x+1| + |x-4| \geq 9.$

Карточка 3

1. $9 - \left(\frac{4x-22}{x-5}\right)^2 \geq 0.$
2. $\frac{4,5x^2}{x+3} \geq \frac{(x-3)^2}{27+3x-2x^2} : \left(\frac{3}{54-21x+2x^2} - \frac{x}{36-12x+x^2}\right).$
3. $|x^2 - 2x - 3| < 3x - 3.$
4. $||x-5|-2| \geq 1.$
5. $\frac{|x-3|}{x^2-5x+6} \geq 2.$
6. $|x-1| + |x+2| - |x-3| > 4.$

Карточка 4

1. $\left(\frac{x^2}{8} + \frac{3x}{4} + \frac{3}{2} + \frac{1}{x}\right) \cdot \left(1 - x - \frac{(x-2)^2(1-x)}{(x+2)^2}\right) > 0.$
2. $\frac{18}{x+2} \geq \frac{(2-x)^2}{3x^2+2x-8} : \left(\frac{x}{6x^2-14x+8} - \frac{2}{4x^2-8x+4}\right).$
3. $\frac{x^2 - |x| - 12}{x-3} \geq 2x.$
4. $|x^2 - 6x + 8| \leq 4 - x.$
5. $||x+7| - 5x| > 3x - 1.$
6. $|x-1| - 2|x-2| + 3|x-3| \leq 4.$

Карточка 5

1. $\frac{3}{6x^2-x-12} < \frac{25x-47}{10x-15} - \frac{3}{3x+4}.$
2. $\left(\frac{1+5x}{6+17x-3x^2} - \frac{1+3x}{6+29x-5x^2}\right) : \frac{1+4x}{1+8x+15x^2} \leq \frac{24}{6-x}.$
3. $\left|\frac{2x-1}{x+2}\right| \leq 4.$
4. $||x-5|-3| \geq 2x-1.$
5. $\frac{4}{|x+3|-1} \geq x+2.$
6. $|2x-4| - |3x+3| - |x-1| > -6.$

Решение подготовительных карточек

Решение подготовительной карточки 1

$$1. \frac{1}{2-x} + \frac{5}{2+x} < 1.$$

$$\frac{2+x+5(2-x)-(2-x)(2+x)}{(2-x)(2+x)} < 0;$$

$$\frac{2+x+10-5x-4+x^2}{(2-x)(2+x)} < 0; \quad \frac{x^2-4x+8}{(2-x)(2+x)} < 0;$$

$$x^2-4x+8 > 0 \quad (\text{при всех } x), \text{ так как}$$

$$\begin{cases} a=1 > 0, \\ D < 0. \end{cases} \quad \frac{x^2-4x+8}{(2-x)(2+x)} < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{(2-x)(2+x)} < 0.$$

Вид неканонический.



Ответ: $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$.

$$2. \left(\frac{4x-5}{3x^2-x-14} + \frac{2}{x^2+2x} - \frac{1}{7x-3x^2} \right) \cdot \frac{x}{2x-3} \geq \frac{16-6x}{3x-7}.$$

$$3x^2-x-14 = 3(x+2)\left(x-\frac{7}{3}\right) = (x+2)(3x-7),$$

$$3x^2-x-14 = 0,$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+168}}{6} = \frac{1 \pm 13}{6}; \quad \begin{cases} x = \frac{7}{3} \\ x = -2. \end{cases}$$

$$\left(\frac{4x-5}{(x+2)(3x-7)} + \frac{2}{x(x+2)} - \frac{1}{x(3x-7)} \right) \cdot \frac{x}{2x-3} - \frac{16-6x}{3x-7} \geq 0;$$

$$\frac{x(4x-5)+2(3x-7)+x+2}{x(x+2)(3x-7)} \cdot \frac{x}{2x-3} - \frac{16-6x}{3x-7} \geq 0;$$

$$\frac{4x^2+2x-12}{x(x+2)(3x-7)} \cdot \frac{x}{2x-3} - \frac{16-6x}{3x-7} \geq 0.$$

$$4x^2+2x-12 = 0; \quad 2x^2+x-6 = 0;$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+48}}{4} = \frac{-1 \pm 7}{4}; \quad \begin{cases} x = -2 \\ x = \frac{3}{2}. \end{cases}$$

$$\text{Так как } 4x^2 + 2x - 12 = 4 \left(x - \frac{3}{2} \right) (x + 2) = 2(2x - 3)(x + 2),$$

$$\frac{2(2x - 3)(x + 2)}{x(x + 2)(3x - 7)} \cdot \frac{x}{2x - 3} - \frac{16 - 6x}{3x - 7} \geq 0;$$

$$\begin{cases} \frac{2}{3x - 7} - \frac{16 - 6x}{3x - 7} \geq 0, \\ x \neq 1,5, \\ x \neq 0, \\ x \neq -2; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{2 - 16 + 6x}{3x - 7} \geq 0, \\ x \neq 1,5, \\ x \neq 0, \\ x \neq -2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{2(3x - 7)}{3x - 7} \geq 0, \\ x \neq 1,5, \\ x \neq 0, \\ x \neq -2; \end{cases} \quad \begin{cases} x \neq 1,5, \\ x \neq 2\frac{1}{3}, \\ x \neq 0, \\ x \neq -2. \end{cases}$$



$$\text{Ответ: } (-\infty; -2) \cup (-2; 0) \cup (0; 1,5) \cup \left(1,5; 2\frac{1}{3}\right) \cup \left(2\frac{1}{3}; +\infty\right).$$

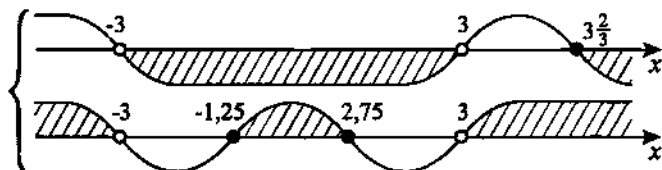
$$3. \quad \left| \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 9} \right| \leq 1.$$

$$\begin{cases} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 9} \leq 1, \\ \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 9} \geq -1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x^2 - 3x + 2 - x^2 + 9}{(x - 3)(x + 3)} \leq 0, \\ \frac{x^2 - 3x + 2 + x^2 - 9}{(x + 3)(x - 3)} \geq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{11 - 3x}{(x - 3)(x + 3)} \leq 0, \\ \frac{2x^2 - 3x - 7}{(x + 3)(x - 3)} \geq 0. \end{cases}$$

$$2x^2 - 3x - 7 = 0; \quad x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{65}}{4}; \quad \begin{cases} x \approx 2,75 \\ x \approx -1,25. \end{cases}$$

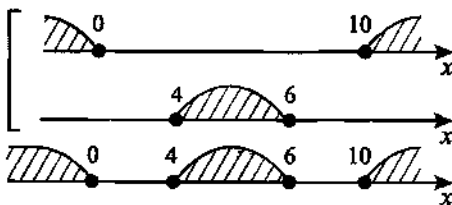
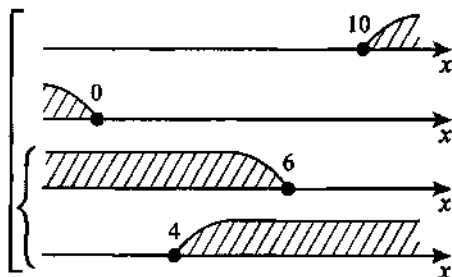


Ответ: $\left[\frac{3 - \sqrt{65}}{4}; \frac{3 + \sqrt{65}}{4} \right] \cup \left[3\frac{2}{3}; +\infty \right)$.

4. $||x - 5| - 3| \geq 2$.

$$\begin{cases} |x - 5| - 3 \geq 2 \\ |x - 5| - 3 \leq -2; \end{cases} \quad \begin{cases} |x - 5| \geq 5 \\ |x - 5| \leq 1; \end{cases}$$

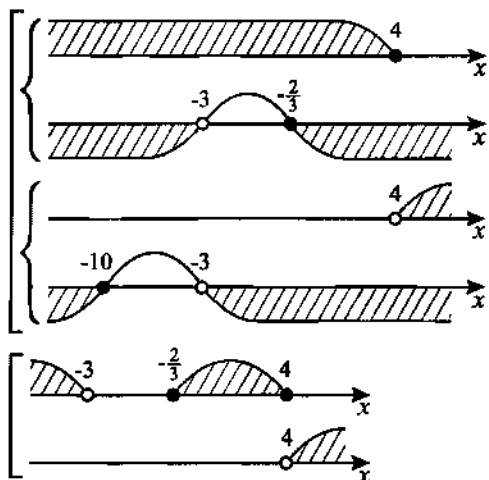
$$\begin{cases} x - 5 \geq 5 \\ x - 5 \leq -5, \\ \begin{cases} x - 5 \leq 1, \\ x - 5 \geq -1; \end{cases} \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 10 \\ x \leq 0, \\ \begin{cases} x \leq 6, \\ x \geq 4. \end{cases} \end{cases}$$



Ответ: $(-\infty; 0] \cup [4; 6] \cup [10; +\infty)$.

$$5. \frac{|4-x|}{3+x} \leq 2.$$

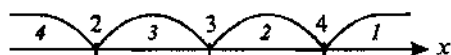
$$\left[\begin{cases} 4-x \geq 0, & (|4-x| = 4-x) \\ \frac{4-x}{3+x} \leq 2 \\ 4-x < 0, & (|4-x| = x-4) \\ \frac{x-4}{3+x} \leq 2; \end{cases} \right. \quad \left[\begin{cases} x \leq 4, \\ \frac{4-x-2(3+x)}{3+x} \leq 0 \\ x > 4, \\ \frac{x-4-2(3+x)}{3+x} \leq 0; \end{cases} \right. \quad \left[\begin{cases} x \leq 4, \\ \frac{-3x-2}{3+x} \leq 0 \\ x > 4, \\ \frac{-x-10}{3+x} \leq 0. \end{cases} \right.$$



$$\text{Ответ: } (-\infty; -3) \cup \left[-\frac{2}{3}; +\infty\right).$$

$$6. |x-2| + |x-3| + |2x-8| < 9.$$

Разобьем числовую ось корнями модулей на четыре интервала и на каждом отдельно раскроем модули, и решим неравенство. Затем, полученные на каждом интервале решения объединим в ответе.



$$1) \begin{cases} x \geq 4, & \begin{cases} x-4 \geq 0 & |x-4| = x-4 \\ x-3 > 0 & |x-3| = x-3 \\ x-2 > 0 & |x-2| = x-2 \end{cases} \\ x-2+x-3+2x-8 < 9; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 4, \\ x < 5,5; \end{cases} \quad [4; 5,5);$$

$$2) \begin{cases} x < 4, & \begin{cases} x-4 < 0 & |x-4| = 4-x \\ x-3 \geq 0 & |x-3| = x-3 \\ x-2 > 0 & |x-2| = x-2 \end{cases} \\ x \geq 3, & \begin{cases} x-3 \geq 0 & |x-3| = x-3 \\ x-2 > 0 & |x-2| = x-2 \end{cases} \\ x-2+x-3+8-2x < 9; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 4, \\ x \geq 3, \\ 3 < 9; \end{cases} \quad [3; 4);$$

$$3) \begin{cases} x < 3, & \begin{cases} x-3 < 0 & |x-3| = 3-x \\ x-2 \geq 0 & |x-2| = x-2 \\ x-4 < 0 & |x-4| = 4-x \end{cases} \\ x \geq 2, & \begin{cases} x-2 \geq 0 & |x-2| = x-2 \\ x-4 < 0 & |x-4| = 4-x \end{cases} \\ x-2+3-x+8-2x < 9; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 3, \\ x \geq 2, \\ x > 0; \end{cases} \quad [2; 3);$$

$$4) \begin{cases} x < 2, & \begin{cases} x-2 < 0 & |x-2| = 2-x \\ x-3 < 0 & |x-3| = 3-x \\ x-4 < 0 & |x-4| = 4-x \end{cases} \\ 2-x+3-x+8-2x < 9; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 2, \\ x > 1; \end{cases} \quad (1; 2).$$

$$(1; 2) \cup [2; 3) \cup [3; 4) \cup [4; 5,5).$$

Ответ: $(1; 5,5)$.

Решение подготовительной карточки 2

$$1. \frac{x^4 - 2x^2 - 8}{x^2 + 2x + 1} < 0.$$

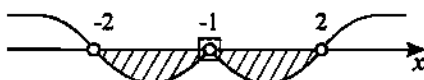
Пусть $x^2 = t$, тогда

$$x^4 - 2x^2 - 8 = t^2 - 2t - 8 = (t - 4)(t + 2),$$

$$\text{так как } t^2 - 2t - 8 = 0; \begin{cases} t = 4 \\ t = -2. \end{cases}$$

$$\frac{(x^2 - 4)(x^2 + 2)}{(x + 1)^2} < 0; \quad \frac{(x - 2)(x + 2)(x^2 + 2)}{(x + 1)^2} < 0;$$

$$\frac{(x - 2)(x + 2)}{(x + 1)^2} < 0, \text{ так как } x^2 + 2 > 0 \quad (\text{при всех } x).$$



Ответ: $(-2; -1) \cup (-1; 2)$.

$$2. \frac{4x + 5}{4x + 6} \geq \frac{x}{4x - 10} \cdot \left(\frac{13}{2x^2 - 7x - 15} + \frac{1}{5 - x} + \frac{5}{2x^2 + 3x} \right).$$

$$2x^2 - 7x - 15 = 2(x - 5)(x + 1,5) = (x - 5)(2x + 3), \text{ так как } 2x^2 - 7x - 15 = 0.$$

$$x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 120}}{4} = \frac{7 \pm 13}{4}; \quad \begin{cases} x = 5 \\ x = -1,5. \end{cases}$$

$$\frac{4x + 5}{2(2x + 3)} \geq \frac{x}{2(2x - 5)} \left(\frac{13}{(x - 5)(2x + 3)} - \frac{1}{x - 5} + \frac{5}{x(2x + 3)} \right);$$

$$\frac{4x + 5}{2(2x + 3)} \geq \frac{x}{2(2x - 5)} \left(\frac{13x - x(2x + 3) + 5(x - 5)}{x(x - 5)(2x + 3)} \right);$$

$$\frac{x}{2(2x - 5)} \cdot \frac{-2x^2 + 15x - 25}{x(2x + 3)(x - 5)} - \frac{4x + 5}{2(2x + 3)} \leq 0;$$

$$\frac{-(x - 5)(2x - 5)}{x(2x + 3)(x - 5)} \cdot \frac{x}{2(2x - 5)} - \frac{4x + 5}{2(2x + 3)} \leq 0, \text{ так как}$$

$$-2x^2 + 15x - 25 = -2(x - 5)(x - 2,5) = -(x - 5)(2x - 5);$$

$$2x^2 - 15x + 25 = 0;$$

$$x_{1,2} = \frac{15 \pm \sqrt{225 - 200}}{4} = \frac{15 \pm 5}{4}; \quad \begin{cases} x = 5 \\ x = 2,5. \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{2(2x+3)} - \frac{4x+5}{2(2x+3)} \leq 0, \\ x \neq 5, \\ x \neq 0, \\ x \neq 2,5; \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1+4x+5}{2(2x+3)} \leq 0, \\ x \neq 5, \\ x \neq 0, \\ x \neq 2,5; \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -1 \leq 0, \\ x \neq 5, \\ x \neq 0, \\ x \neq 2,5, \\ x \neq -1,5. \end{array} \right.$$


Ответ: $(-\infty; -1,5) \cup (-1,5; 0) \cup (0; 2,5) \cup (2,5; 5) \cup (5; +\infty)$.

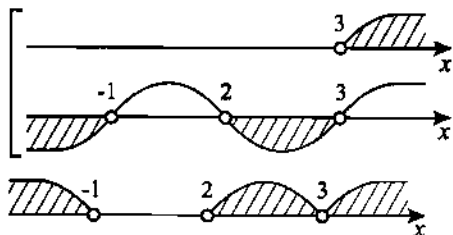
3. $\left| \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 3} \right| > 1.$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 3} > 1 \\ \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 3} < -1; \end{array} \right. \quad \left[\begin{array}{l} \frac{x^2 - 2x + 1 - x + 3}{x - 3} > 0 \\ \frac{x^2 - 2x + 1 + x - 3}{x - 3} < 0; \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{x^2 - 3x + 4}{x - 3} > 0 \\ \frac{x^2 - x - 2}{x - 3} < 0. \end{array} \right.$$

$x^2 - 3x + 4 > 0$ (при всех x), так как $\begin{cases} a = 1 > 0, \\ D < 0. \end{cases}$

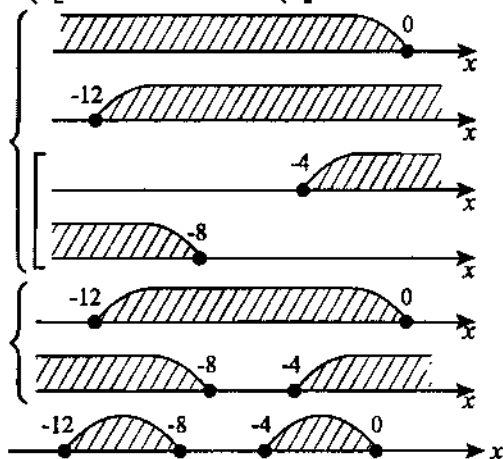
$$\left[\begin{array}{l} \frac{1}{x - 3} > 0 \\ \frac{(x - 2)(x + 1)}{x - 3} < 0. \end{array} \right.$$



Ответ: $(-\infty; -1) \cup (2; 3) \cup (3; +\infty)$.

$$4. \quad ||x+6|-4| \leq 2. \quad \begin{cases} |x+6|-4 \leq 2, \\ |x+6|-4 \geq -2; \end{cases} \quad \begin{cases} |x+6| \leq 6, \\ |x+6| \geq 2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{cases} x+6 \leq 6, \\ x+6 \geq -6, \\ x+6 \geq 2 \\ x+6 \leq -2; \end{cases} & \begin{cases} x \leq 0, \\ x \geq -12, \\ \begin{cases} x \geq -4 \\ x \leq -8. \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$



Ответ: $[-12; -8] \cup [-4; 0]$.

$$5. \quad \frac{|2x-1|}{x^2+x-2} \geq 3.$$

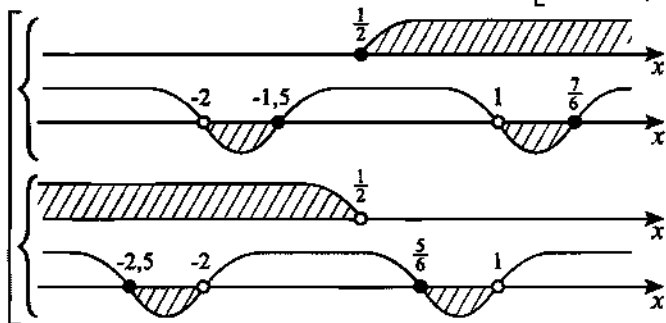
$$\begin{cases} \begin{cases} 2x-1 \geq 0, & (|2x-1| = 2x-1) \\ \frac{2x-1}{x^2+x-2} \geq 3 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x-1 < 0, & (|2x-1| = 1-2x) \\ \frac{1-2x}{x^2+x-2} \geq 3; \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{cases} x \geq \frac{1}{2}, \\ \frac{2x-1-3x^2-3x+6}{x^2+x-2} \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x < \frac{1}{2}, \\ \frac{1-2x-3x^2-3x+6}{x^2+x-2} \geq 0; \end{cases} \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x \geq \frac{1}{2}, \\ \frac{-3x^2 - x + 5}{(x+2)(x-1)} \geq 0 \\ x < \frac{1}{2}, \\ \frac{-3x^2 - 5x + 7}{(x+2)(x-1)} \geq 0; \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x \geq \frac{1}{2}, \\ \frac{3x^2 + x - 5}{(x+2)(x-1)} \leq 0 \\ x < \frac{1}{2}, \\ \frac{3x^2 + 5x - 7}{(x+2)(x-1)} \leq 0; \end{array} \right.$$

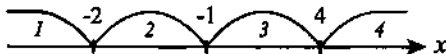
$$3x^2 + x - 5 = 0; \quad x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{61}}{6}; \quad \left\{ \begin{array}{l} x \approx \frac{7}{6} \\ x \approx -1,5. \end{array} \right.$$

$$3x^2 + 5x - 7 = 0; \quad x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{109}}{6}; \quad \left\{ \begin{array}{l} x \approx \frac{5}{6} \\ x \approx -2,5. \end{array} \right.$$



$$\text{Ответ: } \left[\frac{-5 - \sqrt{109}}{6}; -2 \right) \cup \left(1; \frac{-1 + \sqrt{61}}{6} \right].$$

$$6. |x+2| + |x+1| + |x-4| \geq 9.$$



$$1) \left\{ \begin{array}{l} x < -2, \quad \left(\begin{array}{l} x+2 < 0 \\ x+1 < 0 \\ x-4 < 0 \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} |x+2| = -x-2 \\ |x+1| = -x-1 \\ |x-4| = 4-x \end{array} \right) \\ -x-2-x-1+4-x \geq 9; \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x < -2, \\ -3x \geq 8; \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x < -2, \\ x \leq -2\frac{2}{3}; \end{array} \right. \quad x \leq -2\frac{2}{3};$$

$$2) \begin{cases} x \geq -2, & \begin{pmatrix} x+2 \geq 0 & |x+2| = x+2 \\ x+1 < 0 & |x+1| = -x-1 \\ x-4 < 0 & |x-4| = 4-x \end{pmatrix} \\ x < -1, \\ x+2-x-1+4-x \geq 9; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -2, \\ x < -1, \\ -x \geq 4; \end{cases}; \quad \begin{cases} x \geq -2, \\ x < -1, \\ x \leq -4; \end{cases} \quad \text{решений нет;}$$

$$3) \begin{cases} x \geq -1, & \begin{pmatrix} x+1 \geq 0 & |x+1| = x+1 \\ x-4 < 0 & |x-4| = 4-x \\ x+2 > 0 & |x+2| = x+2 \end{pmatrix} \\ x < 4, \\ x+2+x+1+4-x \geq 9; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -1, \\ x < 4, \\ x \geq 2; \end{cases} \quad [2; 4);$$

$$4) \begin{cases} x \geq 4, & \begin{pmatrix} x-4 \geq 0 & |x-4| = x-4 \\ x+2 > 0 & |x+2| = x+2 \\ x+1 > 0 & |x+1| = x+1 \end{pmatrix} \\ x+2+x+1+x-4 \geq 9; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 4, \\ 3x \geq 10; \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 4, \\ x \geq 3\frac{1}{3}; \end{cases} \quad x \geq 4.$$

Объединив ответы, имеем: $\left(-\infty; -2\frac{2}{3}\right] \cup [2; +\infty)$.

Ответ: $\left(-\infty; -2\frac{2}{3}\right] \cup [2; +\infty)$.

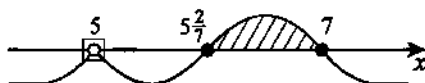
Решение подготовительной карточки 3

$$1. \quad 9 - \left(\frac{4x - 22}{x - 5} \right)^2 \geq 0.$$

$$\left(3 - \frac{4x - 22}{x - 5} \right) \left(3 + \frac{4x - 22}{x - 5} \right) \geq 0;$$

$$\frac{3x - 15 - 4x + 22}{x - 5} \cdot \frac{3x - 15 + 4x - 22}{x - 5} \geq 0;$$

$$\frac{7 - x}{x - 5} \cdot \frac{7x - 37}{x - 5} \geq 0.$$



$$\text{Ответ: } \left[5\frac{2}{7}; 7 \right].$$

$$2. \quad \frac{4,5x^2}{x+3} \geq \frac{(x-3)^2}{27+3x-2x^2} : \left(\frac{3}{54-21x+2x^2} - \frac{x}{36-12x+x^2} \right).$$

$$27+3x-2x^2 = -(2x-9)(x+3);$$

$$2x^2 - 3x - 27 = 0;$$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+216}}{4} = \frac{3 \pm 15}{4}; \quad \begin{cases} x = 4,5 \\ x = -3; \end{cases}$$

$$2x^2 - 21x + 54 = (2x-9)(x-6);$$

$$2x^2 - 21x + 54 = 0;$$

$$x_{1,2} = \frac{21 \pm \sqrt{441-432}}{4} = \frac{21 \pm 3}{4}; \quad \begin{cases} x = 6 \\ x = 4,5. \end{cases}$$

$$\frac{(x-3)^2}{-(2x-9)(x+3)} : \left(\frac{3}{(2x-9)(x-6)} - \frac{x}{(x-6)^2} \right) \leq \frac{4,5x^2}{x+3};$$

$$\frac{4,5x^2}{x+3} + \frac{(x-3)^2}{(2x-9)(x+3)} : \left(\frac{3(x-6) - x(2x-9)}{(2x-9)(x-6)^2} \right) \geq 0;$$

$$\frac{4,5x^2}{x+3} + \frac{(x-3)^2}{(2x-9)(x+3)} \cdot \frac{(x-6)^2(2x-9)}{-2x^2+12x-18} \geq 0;$$

$$\frac{4,5x^2}{x+3} + \frac{(x-3)^2(x-6)^2(2x-9)}{(2x-9)(x+3)(-2)(x-3)^2} \geq 0;$$

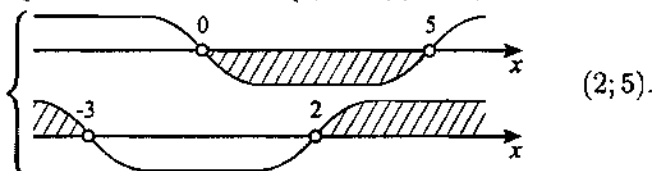
$$\begin{cases} \frac{4,5x^2}{x+3} - \frac{(x-6)^2}{2(x+3)} \geq 0, \\ x \neq 4,5, \\ x \neq \pm 3, \\ x \neq 6; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{9x^2 - (x-6)^2}{2(x+3)} \geq 0, \\ x \neq 4,5, \\ x \neq \pm 3, \\ x \neq 6; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{4(2x-3)(x+3)}{2(x+3)} \geq 0, \\ x \neq 4,5, \\ x \neq \pm 3, \\ x \neq 6; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x-3 \geq 0, \\ x \neq \pm 3, \\ x \neq 4,5, \\ x \neq 6. \end{cases}$$

Ответ: $[1,5; 3) \cup (3; 4,5) \cup (4,5; 6) \cup (6; +\infty)$.

$$3. |x^2 - 2x - 3| < 3x - 3. \quad \begin{cases} x^2 - 2x - 3 < 3x - 3, \\ x^2 - 2x - 3 > 3 - 3x; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 5x < 0, \\ x^2 + x - 6 > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x(x-5) < 0, \\ (x+3)(x-2) > 0. \end{cases}$$



Здесь мы воспользовались I свойством модульных неравенств.

Можно иначе. Если правая часть положительна, то возводим обе части в квадрат, если нет, то решения нет.

Таким образом,

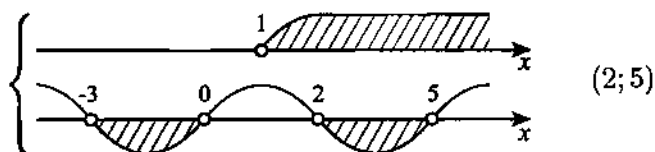
$$|x^2 - 2x - 3| < 3x - 3 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 3 > 0, \\ (|x^2 - 2x - 3|)^2 < (3x - 3)^2; \end{cases}$$

$$(\text{так как } |\alpha| < \beta \Leftrightarrow \begin{cases} \beta > 0 \\ |\alpha|^2 < \beta^2 \end{cases}).$$

$$\begin{cases} x > 1, \\ (x^2 - 2x - 3 + 3x - 3)(x^2 - 2x - 3 - 3x + 3) < 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 1, \\ (x^2 + x - 6)(x^2 - 5x) < 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 1, \\ (x+3)(x-2)x(x-5) < 0. \end{cases}$$

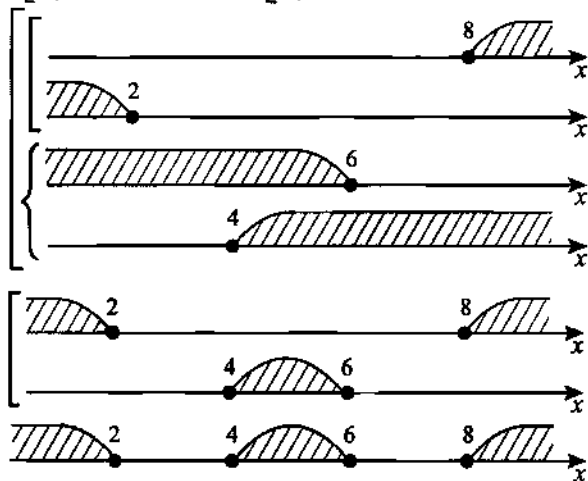


Ответ: (2; 5).

4. $||x - 5| - 2| \geq 1.$

$$\begin{cases} |x - 5| - 2 \geq 1 \\ |x - 5| - 2 \leq -1; \end{cases} \quad \begin{cases} |x - 5| \geq 3 \\ |x - 5| \leq 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{cases} x - 5 \geq 3 \\ x - 5 \leq -3, \end{cases} & \begin{cases} x \geq 8, \\ x \leq 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x - 5 \leq 1, \\ x - 5 \geq -1; \end{cases} & \begin{cases} x \leq 6, \\ x \geq 4. \end{cases} \end{cases}$$

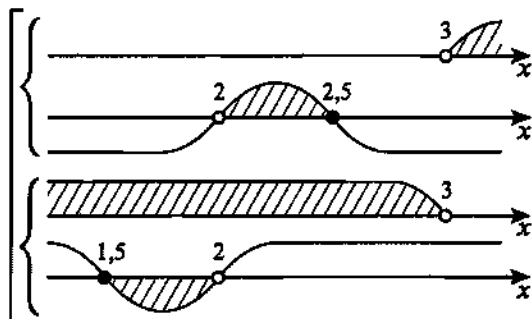


Ответ: $(-\infty; 2] \cup [4; 6] \cup [8; +\infty).$

5. $\frac{|x - 3|}{x^2 - 5x + 6} \geq 2.$

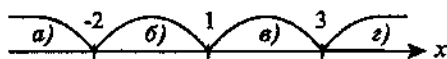
$$\begin{cases} \begin{cases} x \geq 3, & (|x - 3| = x - 3) \\ \frac{x - 3}{x^2 - 5x + 6} \geq 2 \end{cases} & \begin{cases} x \geq 3, \\ \frac{x - 3}{(x - 3)(x - 2)} \geq 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 3, & (|x - 3| = 3 - x) \\ \frac{3 - x}{x^2 - 5x + 6} \geq 2; \end{cases} & \begin{cases} x < 3, \\ \frac{3 - x}{(x - 3)(x - 2)} \geq 2; \end{cases} \end{cases}$$

$$\left[\begin{cases} x > 3, \\ \frac{1}{x-2} \geq 2 \\ x < 3, \\ \frac{-1}{x-2} \geq 2; \end{cases} \right. \quad \left[\begin{cases} x > 3, \\ \frac{5-2x}{x-2} \geq 0 \\ x < 3, \\ \frac{2x-3}{x-2} \leq 0. \end{cases} \right.$$



Ответ: $[1.5; 2)$.

6. $|x-1| + |x+2| - |x-3| > 4$.



а) $x < -2$

$$\begin{cases} x+2 < 0, & \left(\begin{aligned} |x+2| &= -x-2 \\ |x-1| &= 1-x \\ |x-3| &= 3-x \end{aligned} \right) \\ x-1 < 0, \\ x-3 < 0, \\ 1-x-x-2-(3-x) > 4; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < -2, \\ x < -8; \end{cases} \quad (-\infty; -8);$$

б) $-2 \leq x < -1$

$$\begin{cases} x+2 \geq 0, & \left(\begin{aligned} |x+2| &= x+2 \\ |x-1| &= 1-x \\ |x-3| &= 3-x \end{aligned} \right) \\ x-1 < 0, \\ x-3 < 0, \\ 1-x+x+2-(3-x) > 4; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -2, \\ x < 1, \\ x > 4; \end{cases} \quad \text{нет решений};$$

$$\text{в) } 1 \leq x < 3$$

$$\begin{cases} x+2 > 0, \\ x-1 \geq 0, \\ x-3 < 0, \\ x-1+x+2-(3-x) > 4; \end{cases} \left(\begin{cases} |x+2| = x+2 \\ |x-1| = x-1 \\ |x-3| = 3-x \end{cases} \right) \begin{cases} x \geq 1, \\ x < 3, \\ x > 2; \end{cases} \quad (2; 3);$$

$$\text{г) } x \geq 3$$

$$\begin{cases} x+2 > 0, \\ x-1 > 0, \\ x-3 \geq 0, \\ x-1+x+2-(x-3) > 4; \end{cases} \left(\begin{cases} |x+2| = x+2 \\ |x-1| = x-1 \\ |x-3| = x-3 \end{cases} \right) \begin{cases} x \geq 3, \\ x > 0; \end{cases} \quad [3; +\infty).$$

Ответ: $(-\infty; -8) \cup (2; +\infty)$.

Решение подготовительной карточки 4

$$1. \left(\frac{x^2}{8} + \frac{3x}{4} + \frac{3}{2} + \frac{1}{x} \right) \left(1 - x - \frac{(x-2)^2(1-x)}{(x+2)^2} \right) > 0.$$

$$\frac{x^3 + 6x^2 + 12x + 8}{8x} \cdot \frac{(1-x)((x+2)^2 - (x-2)^2)}{(x+2)^2} > 0;$$

$$\frac{(x+2)^3}{8x} \cdot \frac{(1-x) \cdot 2x \cdot 4}{(x+2)^2} > 0.$$



Ответ: $(-2; 0) \cup (0; 1)$.

$$2. \frac{18}{x+2} \geq \frac{(2-x)^2}{3x^2+2x-8} : \left(\frac{x}{6x^2-14x+8} - \frac{2}{4x^2-8x+4} \right).$$

$$3x^2+2x-8 = 3 \left(x - \frac{4}{3} \right) (x+2) = (3x-4)(x+2);$$

$$6x^2-14x+8 = 6 \left(x - \frac{4}{3} \right) (x-1) = 2(3x-4)(x-1);$$

$$3x^2+2x-8 = 0;$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{3} = \frac{-1 \pm 5}{3}; \quad \begin{cases} x = -2 \\ x = \frac{4}{3} \end{cases}$$

$$6x^2-14x+8 = 0;$$

$$3x^2-7x+4 = 0;$$

$$x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49-48}}{6}; \quad \begin{cases} x = \frac{4}{3} \\ x = 1. \end{cases}$$

$$\frac{18}{x+2} \geq \frac{(2-x)^2}{(3x-4)(x+2)} : \left(\frac{x}{2(3x-4)(x-1)} - \frac{2}{4(x-1)^2} \right);$$

$$\frac{(2-x)^2}{(3x-4)(x+2)} : \left[\frac{2x(x-1) - 2(3x-4)}{4(x-1)^2(3x-4)} \right] - \frac{18}{x+2} \leq 0;$$

$$\frac{(2-x)^2}{(3x-4)(x+2)} \cdot \frac{4(x-1)^2(3x-4)}{2x^2-8x+8} - \frac{18}{x+2} \leq 0;$$

$$\frac{(2-x)^2 4(x-1)^2 (3x-4)}{(3x-4)(x+2)2(x-2)^2} - \frac{18}{x+2} \leq 0;$$

$$\begin{cases} \frac{2(x-1)^2}{x+2} - \frac{18}{x+2} \leq 0, \\ x \neq 2, \\ x \neq 1, \\ x \neq \frac{4}{3}; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{2((x-1)^2 - 9)}{x+2} \leq 0, \\ x \neq 2, \\ x \neq 1, \\ x \neq \frac{4}{3}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{2(x-4)(x+2)}{x+2} \leq 0, \\ x \neq 2, \\ x \neq 1, \\ x \neq \frac{4}{3}; \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq 4, \\ x \neq 2, \\ x \neq 1, \\ x \neq \frac{4}{3}, \\ x \neq -2. \end{cases}$$



Ответ: $(-\infty; -2) \cup (-2; 1) \cup \left(1; \frac{4}{3}\right) \cup \left(\frac{4}{3}; 2\right) \cup (2; 4]$.

3. $\frac{x^2 - |x| - 12}{x-3} \geq 2x.$

$$\begin{cases} \begin{cases} x \geq 0, & |x| = x \\ \frac{x^2 - x - 12}{x-3} \geq 2x \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0, & |x| = -x \\ \frac{x^2 + x - 12}{x-3} \geq 2x; \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{cases} x \geq 0, \\ \frac{x^2 - x - 12 - 2x(x-3)}{x-3} \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0, \\ \frac{(x+4)(x-3)}{x-3} \geq 2x; \end{cases} \end{cases} \quad \begin{cases} \begin{cases} x \geq 0, \\ \frac{-x^2 + 5x - 12}{x-3} \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0, \\ x+4 \geq 2x, \\ x \neq 3; \end{cases} \end{cases}$$

$$-(x^2 - 5x + 12) < 0; \quad (\text{при всех } x) \quad \begin{cases} a = -1 < 0, \\ D < 0. \end{cases}$$

$$\left[\begin{cases} x \geq 0, \\ \frac{1}{x-3} \leq 0 \\ x < 0, \\ x \leq 4, \\ x \neq 3; \end{cases} \right] \quad \left[\begin{cases} x \geq 0, \\ x < 3, \\ x < 0. \end{cases} \right]$$

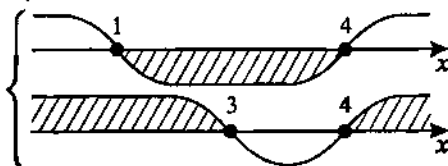
Ответ: $(-\infty; 3)$.

4. $|x^2 - 6x + 8| \leq 4 - x$.

а) Первый способ решения:

$$\begin{cases} x^2 - 6x + 8 \leq 4 - x, \\ x^2 - 6x + 8 \geq x - 4; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - 5x + 4 \leq 0, \\ x^2 - 7x + 12 \geq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-4)(x-1) \leq 0, \\ (x-3)(x-4) \geq 0. \end{cases}$$



$$[1; 3] \cup \{4\},$$

так как можно воспользоваться I свойством модульных неравенств.

б) Другой способ:

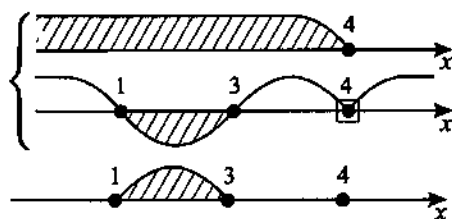
$$|x^2 - 6x + 8| \leq 4 - x \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - x \geq 0, \\ (|x^2 - 6x + 8|)^2 \leq (4 - x)^2, \end{cases}$$

так как $|x|^2 = x^2$;

$$\begin{cases} x \leq 4, \\ (x^2 - 6x + 8 + 4 - x)(x^2 - 6x + 8 - 4 + x) \leq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq 4, \\ (x^2 - 7x + 12)(x^2 - 5x + 4) \leq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq 4, \\ (x-4)(x-3)(x-4)(x-1) \leq 0. \end{cases}$$



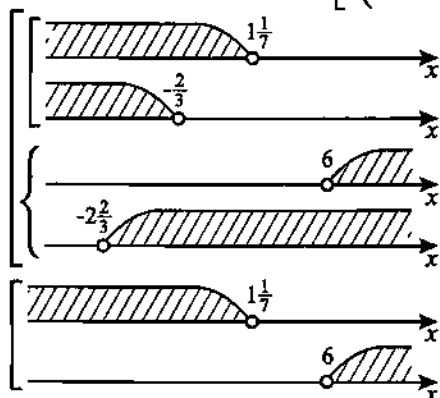
Ответ: $[1; 3] \cup \{4\}$.

5. $||x + 7| - 5x| > 3x - 1$.

$$\begin{cases} |x + 7| - 5x > 3x - 1 \\ |x + 7| - 5x < 1 - 3x; \end{cases}$$

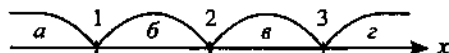
$$\begin{cases} |x + 7| > 8x - 1 \\ |x + 7| < 2x + 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{cases} x + 7 > 8x - 1 \\ x + 7 < 1 - 8x, \\ x + 7 < 2x + 1, \\ x + 7 > -2x - 1; \end{cases} & \begin{cases} x < \frac{8}{7} \\ x < -\frac{2}{3}, \\ \begin{cases} x > 6, \\ x > -2\frac{2}{3}. \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$



Ответ: $(-\infty; 1\frac{1}{7}) \cup (6; +\infty)$.

6. $|x - 1| - 2|x - 2| + 3|x - 3| \leq 4$.



$$\begin{aligned}
 \text{а) } & \left\{ \begin{array}{l} x < 1, \left(\begin{array}{ll} x-1 < 0 & |x-1| = 1-x \\ x-2 < 0 & |x-2| = 2-x \\ x-3 < 0 & |x-3| = 3-x \end{array} \right) \\ 1-x+2(x-2)-3x+9 \leq 4; \\ \left\{ \begin{array}{l} x < 1, \\ -2x \leq -2; \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x < 1, \\ x \geq 1; \end{array} \right. \quad \text{решений нет;}
 \end{array}
 \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{б) } & \left\{ \begin{array}{l} x \geq 1, \left(\begin{array}{ll} x-1 \geq 0 & |x-1| = x-1 \\ x-2 < 0 & |x-2| = 2-x \\ x-3 < 0 & |x-3| = 3-x \end{array} \right) \\ x-1+2(x-2)-3x+9 \leq 4; \\ \left\{ \begin{array}{l} x \geq 1, \\ x < 2, \end{array} \right. \quad [1; 2); \\ 4 \leq 4;
 \end{array}
 \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{в) } & \left\{ \begin{array}{l} x \geq 2, \left(\begin{array}{ll} x-2 \geq 0 & |x-2| = x-2 \\ x-3 < 0 & |x-3| = 3-x \\ x-1 > 0 & |x-1| = x-1 \end{array} \right) \\ x-1-2(x-2)-3x+9 \leq 4; \\ \left\{ \begin{array}{l} x \geq 2, \\ x < 3, \end{array} \right. \quad [2; 3); \\ x \geq 2;
 \end{array}
 \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{г) } & \left\{ \begin{array}{l} x \geq 3, \left(\begin{array}{ll} x-3 \geq 0 & |x-3| = x-3 \\ x-2 > 0 & |x-2| = x-2 \\ x-1 > 0 & |x-1| = x-1 \end{array} \right) \\ x-1-2(x-2)+3x-9 \leq 4; \\ \left\{ \begin{array}{l} x \geq 3, \\ x \leq 5; \end{array} \right. \quad [3; 5].
 \end{array}
 \right.
 \end{aligned}$$

Объединив все решения, имеем: $[1; 5]$.

Ответ: $[1; 5]$.

Решение подготовительной карточки 5

$$1. \frac{3}{6x^2 - x - 12} < \frac{25x - 47}{10x - 15} - \frac{3}{3x + 4}.$$

$$6x^2 - x - 12 = 6(x - 1,5) \left(x + \frac{4}{3}\right) = (2x - 3)(3x + 4);$$

$$6x^2 - x - 12 = 0;$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 288}}{12} = \frac{1 \pm 17}{12}; \quad \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ x = -\frac{4}{3}. \end{cases}$$

$$\frac{3}{(2x - 3)(3x + 4)} - \frac{25x - 47}{5(2x - 3)} + \frac{3}{3x + 4} < 0;$$

$$\frac{15 - (25x - 47)(3x + 4) + 15(2x - 3)}{5(2x - 3)(3x + 4)} < 0;$$

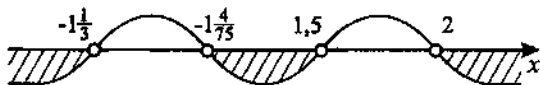
$$\frac{15 - 75x^2 + 141x + 188 - 100x + 30x - 45}{5(2x - 3)(3x + 4)} < 0;$$

$$\frac{-75x^2 + 71x + 158}{5(2x - 3)(3x + 4)} < 0;$$

$$-75x^2 + 71x + 158 = -75(x - 2) \left(x + \frac{79}{75}\right) = -(x - 2)(75x + 79);$$

$$75x^2 - 71x - 158 = 0;$$

$$x_{1,2} = \frac{71 \pm \sqrt{71^2 + 4 \cdot 75 \cdot 158}}{150} = \frac{71 \pm 229}{150}; \quad \begin{cases} x = 2 \\ x = -\frac{79}{75}. \end{cases}$$



$$\text{Ответ: } \left(-\infty; -1\frac{1}{3}\right) \cup \left(-1\frac{4}{75}; 1,5\right) \cup (2; +\infty).$$

$$2. \left(\frac{1 + 5x}{6 + 17x - 3x^2} - \frac{1 + 3x}{6 + 29x - 5x^2}\right) : \frac{1 + 4x}{1 + 8x + 15x^2} \leq \frac{24}{6 - x}.$$

$$6 + 17x - 3x^2 = -3 \left(x + \frac{1}{3}\right) (x - 6) = -(3x + 1)(x - 6);$$

$$3x^2 - 17x - 6 = 0;$$

$$x_{1,2} = \frac{17 \pm \sqrt{289 + 72}}{6} = \frac{17 \pm 19}{6}; \quad \begin{cases} x = -\frac{1}{3} \\ x = 6; \end{cases}$$

$$6 + 29x - 5x^2 = -5 \left(x + \frac{1}{5} \right) (x - 6) = -(5x + 1)(x - 6);$$

$$5x^2 - 29x - 6 = 0;$$

$$x_{1,2} = \frac{29 \pm \sqrt{841 + 120}}{10} = \frac{29 \pm 31}{10}; \quad \begin{cases} x = 6 \\ x = -\frac{1}{5}; \end{cases}$$

$$1 + 8x + 15x^2 = (5x + 1)(3x + 1);$$

$$15x^2 + 8x + 1 = 0;$$

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 15}}{15}; \quad \begin{cases} x = -\frac{1}{3} \\ x = -\frac{1}{5}. \end{cases}$$

$$\left(\frac{1+3x}{(5x+1)(x-6)} - \frac{1+5x}{(3x+1)(x-6)} \right) \cdot \frac{1+4x}{(1+3x)(1+5x)} - \frac{24}{6-x} \leq 0;$$

$$\frac{(1+3x)^2 - (1+5x)^2}{(1+3x)(1+5x)(x-6)} \cdot \frac{(1+3x)(1+5x)}{1+4x} + \frac{24}{x-6} \leq 0;$$

$$\frac{2(1+4x)(-2x)(1+3x)(1+5x)}{(1+3x)(1+5x)(x-6)(1+4x)} + \frac{24}{x-6} \leq 0;$$

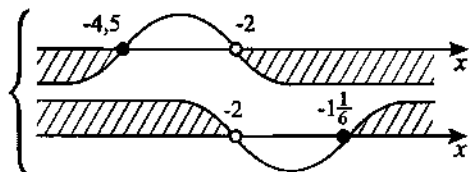
$$\begin{cases} \frac{-4x}{x-6} + \frac{24}{x-6} \leq 0, \\ x \neq -\frac{1}{3}, \\ x \neq -\frac{1}{5}, \\ x \neq -\frac{1}{4}; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{-4(x-6)}{x-6} \leq 0, \\ x \neq -\frac{1}{3}, \\ x \neq -\frac{1}{5}, \\ x \neq -\frac{1}{4}; \end{cases} \quad \begin{cases} -4 \leq 0, \\ x \neq -\frac{1}{3}, \\ x \neq -\frac{1}{5}, \\ x \neq -\frac{1}{4}, \\ x \neq 6. \end{cases}$$



Ответ: $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right) \cup \left(-\frac{1}{3}; -\frac{1}{4}\right) \cup \left(-\frac{1}{4}; -\frac{1}{5}\right) \cup \left(-\frac{1}{5}; 6\right) \cup (6; +\infty)$.

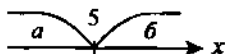
$$3. \left| \frac{2x-1}{x+2} \right| \leq 4.$$

$$\begin{cases} \frac{2x-1}{x+2} \leq 4, \\ \frac{2x-1}{x+2} \geq -4; \end{cases} \begin{cases} \frac{2x-1-4x-8}{x+2} \leq 0, \\ \frac{2x-1+4x+8}{x+2} \geq 0; \end{cases} \begin{cases} \frac{-(2x+9)}{x+2} \leq 0, \\ \frac{6x+7}{x+2} \geq 0. \end{cases}$$



$$\text{ОТВЕТ: } (-\infty; -4,5] \cup \left[-1\frac{1}{6}; +\infty\right).$$

$$4. ||x-5|-3| \geq 2x-1.$$

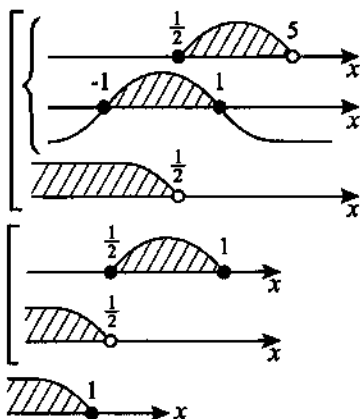


$$a) \begin{cases} x-5 < 0, & |x-5| = 5-x \\ |5-x-3| \geq 2x-1; \end{cases} \begin{cases} x < 5, \\ |2-x| \geq 2x-1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} 2x-1 \geq 0, \\ x < 5, \\ |2-x|^2 \geq (2x-1)^2 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x-1 < 0, \\ x < 5; \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{cases} x \geq \frac{1}{2}, \\ x < 5, \\ (x-2+2x-1)(x-2-2x+1) \geq 0 \end{cases} \\ x < \frac{1}{2}; \end{cases}$$

$$\left[\begin{cases} x \geq \frac{1}{2}, \\ x < 5, \\ 3(x-1)(-x-1) \geq 0 \\ x < \frac{1}{2}. \end{cases} \right.$$



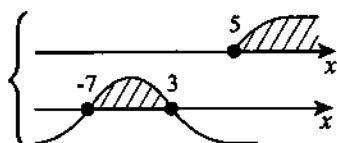
$$(-\infty; 1].$$

$$6) \begin{cases} x - 5 \geq 0, & |x - 5| = x - 5 \\ |x - 5 - 3| \geq 2x - 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 5, \\ |x - 8| \geq 2x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 5, \\ (|x - 8|)^2 \geq (2x - 1)^2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 5, \\ (x - 8 + 2x - 1)(x - 8 - 2x + 1) \geq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 5, \\ 3(x - 3)(-7 - x) \geq 0. \end{cases}$$



нет решений.

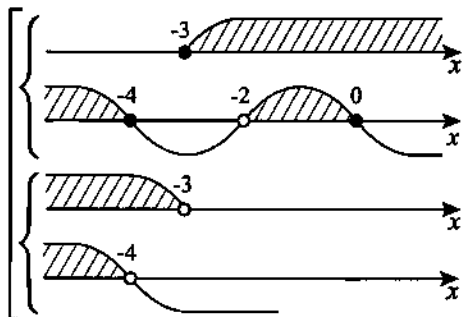
Но можно проще, используя свойства.

$$\begin{aligned}
 ||x-5|-3| \geq 2x-1 &\Leftrightarrow \begin{cases} |x-5|-3 \geq 2x-1 \\ |x-5|-3 \leq 1-2x; \end{cases} \\
 \begin{cases} |x-5| \geq 2x+2 \\ |x-5| \leq 4-2x; \end{cases} &\begin{cases} x-5 \geq 2x+2 \\ x-5 \leq -2x-2, \\ \begin{cases} x-5 \leq 4-2x, \\ x-5 \geq 2x-4; \end{cases} \end{cases} \begin{cases} x \leq -7 \\ x \leq 1, \\ \begin{cases} x \leq 3, \\ x \leq -1; \end{cases} \end{cases} \\
 \begin{cases} x \leq -1 \\ x \leq 1; \end{cases} &x \leq 1.
 \end{aligned}$$

Ответ: $(-\infty; 1]$.

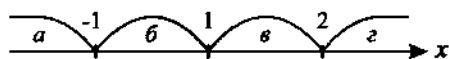
$$5. \frac{4}{|x+3|-1} \geq x+2.$$

$$\begin{aligned}
 &\left\{ \begin{cases} x+3 \geq 0, \\ \frac{4}{x+3-1} \geq x+2 \\ x+3 < 0, \\ \frac{4}{-x-3-1} \geq x+2; \end{cases} \right. & \left\{ \begin{cases} x \geq -3, \\ \frac{4-(x+2)^2}{x+2} \geq 0 \\ x < -3, \\ \frac{-4-(x+2)(x+4)}{x+4} \geq 0; \end{cases} \right. \\
 &\left\{ \begin{cases} x \geq -3, \\ \frac{-x(x+4)}{x+2} \geq 0 \\ x < -3, \\ \frac{-(x^2+6x+12)}{x+4} \geq 0; \end{cases} \right. & \left\{ \begin{cases} x \geq -3, \\ \frac{-x(x+4)}{x+2} \geq 0 \\ x < -3, \\ \frac{-1}{x+4} \geq 0. \end{cases} \right.
 \end{aligned}$$



Ответ: $(-\infty; -4) \cup (-2; 0]$.

$$6. |2x - 4| - |3x + 3| - |x - 1| > -6.$$



$$a) \begin{cases} x < -1, & \begin{cases} 3x + 3 < 0 & |3x + 3| = -3x - 3 \\ x - 1 < 0 & |x - 1| = 1 - x \\ 2x - 4 < 0 & |2x - 4| = 4 - 2x \end{cases} \\ 4 - 2x + 3x + 3 + x - 1 > -6; \\ \begin{cases} x < -1, \\ x > -6; \end{cases} & (-6; -1); \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} x \geq -1, & \begin{cases} 3x + 3 \geq 0 & |3x + 3| = 3x + 3 \\ x - 1 < 0 & |x - 1| = 1 - x \\ 2x - 4 < 0 & |2x - 4| = 4 - 2x \end{cases} \\ 4 - 2x - 3x - 3 + x - 1 > -6; \\ \begin{cases} x \geq -1, \\ x < 1, \\ x < \frac{3}{2}; \end{cases} & [-1; 1); \end{cases}$$

$$в) \begin{cases} x \geq 1, & \begin{cases} x - 1 \geq 0 & |x - 1| = x - 1 \\ 2x - 4 < 0 & |2x - 4| = 4 - 2x \\ 3x + 3 > 0 & |3x + 3| = 3x + 3 \end{cases} \\ 4 - 2x - 3x - 3 - x + 1 > -6; \\ \begin{cases} x \geq 1, \\ x < 2, \\ x < \frac{4}{3}; \end{cases} & \left[1; \frac{4}{3}\right); \end{cases}$$

$$г) \begin{cases} x \geq 2, & \begin{cases} 2x - 4 \geq 0 & |2x - 4| = 2x - 4 \\ 3x + 3 > 0 & |3x + 3| = 3x + 3 \\ x - 1 > 0 & |x - 1| = x - 1 \end{cases} \\ 2x - 4 - 3x - 3 - x + 1 > -6; \\ \begin{cases} x \geq 2, \\ x < 0; \end{cases} & \text{нет решений.} \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } \left(-6; 1\frac{1}{3}\right).$$

Тренировочные карточки*Карточка 1*

$$1. \frac{1}{x+1} - \frac{2}{x^2-x+1} \leq \frac{1-2x}{1+x^3}.$$

$$2. \frac{x^2}{x^2-7x+10} + \frac{16}{3x^2-12} \leq 1.$$

$$3. |x^2+4x+3| > x+3.$$

$$4. \frac{(1+x)(2+x)}{x^2-|x|-2} \geq -3x.$$

$$5. ||x-1|-5| \leq 2.$$

$$6. \frac{4x-1}{|x-1|} \geq |x+1|.$$

Карточка 2

$$1. \left(\frac{x-2}{x-1} \right)^2 \leq \frac{x^2-6x+8}{x^2+x-2}.$$

$$2. \frac{1}{x^2-4} + \frac{4}{2x^2+7x+6} \leq \frac{1}{2x+3} + \frac{4}{2x^3+3x^2-8x-12}.$$

$$3. \left| \frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2} \right| \geq 1.$$

$$4. ||x+5|-2| < x+1.$$

$$5. \frac{4}{|x+1|-2} \geq x-1.$$

$$6. |x-1|-|x|+|2x+3| > 2x+4.$$

Карточка 3

$$1. \left(\frac{x+1}{4-x} \right)^2 \leq \frac{1}{4}.$$

$$2. \frac{10(5-x)}{3(x-4)} - \frac{11}{3} \cdot \frac{6-x}{x-4} \geq \frac{5(6-x)}{x-2}.$$

$$3. \frac{2x-5}{|x-3|} > -1.$$

$$4. \left| \frac{x-3}{x^2-2x+1} \right| \leq 1.$$

$$5. ||x+6|-4| \geq x+1.$$

$$6. (|x-1|-3)(|x+2|-5) < 0.$$

Карточка 4

$$1. \left(x + \frac{6}{x}\right)^2 + 2\left(x + \frac{6}{x}\right) - 35 \leq 0.$$

$$2. \left(\frac{2x+1}{x^2+x-20} - \frac{x-4}{2x^2+11x+5}\right) : \frac{3}{2x+1} \leq \frac{3}{x-4}.$$

$$3. x^2 - 8x - \frac{3}{|x-4|} + 18 \leq 0.$$

$$4. \left|\frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 4}\right| \leq 1.$$

$$5. ||x+5| - 2x| > x+3.$$

$$6. |x-1| - |x-2| + |x-3| \geq x+5.$$

Карточка 5

$$1. \frac{3-x}{(x+2)(x-1)} \leq \frac{2(3-x)}{2x^2-x-1}.$$

$$2. \frac{x-3}{x^2+10x+21} + \frac{20}{3x^2+12x-63} \geq \frac{x-7}{9-x^2}.$$

$$3. \frac{|x+2|-x}{x} \leq 2.$$

$$4. |x^2+5x| \geq 6.$$

$$5. 2|5-x| < |2-x| + |2x-7|.$$

$$6. ||x+5| - 2x| > x-3.$$

Карточка 6

$$1. \frac{2}{x^2-3x-4} \geq \frac{3}{x^2+x-6}.$$

$$2. \frac{x+4}{x^2-3x-10} + \frac{x}{x^2+3x-4} \geq \frac{2x+0,8}{x^2-x-20}.$$

$$3. \frac{|x+3|}{x^2+5x+6} \leq 2.$$

$$4. \left|\frac{x^2+2x+1}{x+3}\right| \geq 1.$$

$$5. ||x+5| - x+2| \leq 1.$$

$$6. 2|7-2x| < |7-3x| + |x+2|.$$

Карточка 7

$$1. \left(\frac{3-x}{2+x} \right)^2 > 1.$$

$$2. \frac{6x+7}{2x+3} \geq \frac{2x+8}{3x+7} \cdot \left(\frac{x+4}{2x^2+x-3} - \frac{2x+3}{x^2+3x-4} \right).$$

$$3. (|x| - 8)(|x| - 2) > 0.$$

$$4. \frac{|x^2 - 2x| + 4}{x^2 + |x + 2|} \geq 1.$$

$$5. \left| \frac{x^2 - 1}{x + 2} \right| < 1.$$

$$6. ||x^2 - 3x + 2| - 1| > x - 2.$$

Карточка 8

$$1. \frac{2}{x^3} - \frac{3}{x^2} > \frac{5}{x}.$$

$$2. \frac{17,5x}{2+5x-3x^2} \geq \frac{x+2}{3x+1} + \frac{3x-1}{2-x}.$$

$$3. ||x+1| - 5| \leq 2.$$

$$4. |x^2 - 3x| + x - 2 < 0.$$

$$5. |x+1| + |x-2| - |x-3| > 4.$$

$$6. \left| \frac{2-3|x|}{1+|x|} \right| > 1.$$

*Зачетные карточки заданий**Карточка 1*

$$1. \left(\frac{4x^2 + 5x - 1}{2x^2 + 5x + 3} \right)^2 > 1.$$

$$2. \frac{1}{x+2} + \frac{ax+6-2a-3x}{x-a-1} \left(\frac{a+3}{ax^2-3x^2-4a+12} - \frac{x+2}{a^2x-9x-2a^2+18} \right) \leq 0.$$

$$3. \frac{x^2 - |x| - 6}{x - 2} \geq 2x.$$

$$4. \frac{|24 - 2x - x^2|}{x} \leq x.$$

$$5. \frac{2 - |x - 2|}{1 - |x + 2|} \leq 0.$$

$$6. |x^4 - 8x^3 + 17x^2 + 2x - 24| \leq |x^3 - 4x^2 + x + 6|.$$

Карточка 2

$$1. \frac{35x}{4 + 10x - 6x^2} \geq \frac{x + 2}{3x + 1} - \frac{3x - 1}{x - 2}.$$

$$2. \frac{2ax-2x^2}{2a-3x} + \frac{a+2x}{3a+5x} : \left(\frac{2a+x}{3a^2-ax-10x^2} - \frac{2a}{6a^2+7ax-5x^2} - \frac{x}{2a^2-5ax+2x^2} \right) > 0.$$

$$3. \left| \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 16} \right| \leq 1.$$

$$4. \frac{4x - 1}{|x + 1|} \geq x - 1.$$

$$5. |x| \geq \frac{2x}{|x - 3|}.$$

$$6. |5 + x| < |x + 2| + |2x - 7|.$$

Карточка 3

1. $\frac{(x-4)^2}{x^2-6x+9} > \frac{4x^2-12x+9}{(2x-1)^2}$.
2. $\frac{11}{4x^2+14x-8} - \frac{4-3x}{3x^2-8x-3} \geq \frac{2x+1}{2x^2+2x-24}$.
3. $||x+6|-4| < x+1$.
4. $\frac{1}{|x-1|-3} \leq \frac{1}{2}$.
5. $\left| \frac{x^2+5x}{x+1} \right| \geq 3$.
6. $|x+1|-|x|+|2x-3| > 2x+4$.

Карточка 4

1. $\frac{(x+4)^2}{x^2+6x+9} > \frac{4x^2-12x+9}{(2x-1)^2}$.
2. $\left(\frac{2c+3x}{2x^2-cx-3c^2} - \frac{5c}{6x^2-13cx+6c^2} + \frac{5x}{2c^2-cx-3x^2} \right) \cdot \frac{x+c}{x-9c} \geq \frac{0,2}{2c-3x}$.
3. $\frac{x^2-2x-3}{|x-3|} < \frac{2}{x}$.
4. $||x+7|-2x| < x+1$.
5. $|x+2|+|x-1| < 3x$.
6. $\left| \frac{x^2+x-20}{x^2-x-20} \right| \geq 1$.

Карточка 5

1. $\frac{6x^2-x-18}{3x^2-12} + \frac{5-2x}{2-x} \leq 5 + \frac{1}{x-2}$.
2. $\left(\frac{a+5b}{6a^2+17ab-3b^2} - \frac{a+3b}{6a^2+29ab-5b^2} \right) : \frac{a+4b}{a^2+8ab+15b^2} \leq \frac{24a}{6a-b}$.
3. $||x-6|-3| < x-1$.
4. $\frac{x^2+x-12}{|x+4|} \leq \frac{4}{x}$.
5. $(|x+1|-3)(|x-2|-5) < 0$.
6. $\frac{|x^2-4x|+3}{x^2+|x-5|} \geq 1$.

Карточка 6

$$1. \frac{5}{(x+1)^3} - \frac{3}{(x+1)^2} \leq \frac{2}{x+1}.$$

$$2. \left(\frac{2+3x}{2x^2-x-3} - \frac{5}{6x^2-13x+6} + \frac{5x}{2-x-3x^2} \right) \frac{x+1}{x-9} \geq \frac{0,2}{2-3x}.$$

$$3. \frac{|x^2 - 5x + 6|}{x-3} \leq \frac{3}{x}.$$

$$4. \frac{4}{|x+3|-1} \geq |x+2|.$$

$$5. |1 - |x+2|| < 3 - x.$$

$$6. |x+1| + |x-2| - |x+3| > 4.$$

Карточка 7

$$1. A(x, c) = \frac{2c+3x+6}{2x^2+x(8-c)+8-2c-3c^2} -$$
$$- \frac{5c}{6x^2+x(24-13c)+24-26c+6c^2} +$$
$$+ \frac{5(x+2)}{2c^2-x(c+12)-12-2c-3x^2}.$$

$$A(x, c) \cdot \frac{x+c+2}{x-9c+2} + \frac{0,2}{3x-2c+6} \leq 0.$$

$$2. (x+2)(x+3)(x+8)(x+12) \leq 4x^2.$$

$$3. |x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6| \leq |x^3 + 2x^2 - 5x - 6|.$$

$$4. |x^2 - 5|x| + 4| \geq |2x^2 - 3|x| + 1|.$$

$$5. \frac{(1+x)(x+2)}{x^2 - |x| - 2} \geq -3x.$$

$$6. |x^2 + 4x - 2| < 2x + 1.$$

Карточка 8

$$1. \left(x - \frac{6}{x}\right)^2 + 2\left(x - \frac{6}{x}\right) - 35 \leq 0.$$

$$2. \left(\frac{2+5x}{24+34x-3x^2} - \frac{2+3x}{24+58x-5x^2}\right) : \frac{4x+2}{4+16x+15x^2} \leq \frac{48}{12-x}.$$

$$3. \left|\frac{x^2-6x+8}{x-4}\right| \geq \frac{3}{x}.$$

$$4. (x+6)^4 + 2x^2(x+6)^2 \leq 35x^4.$$

$$5. (|1-3x| - |x+2| - 2)(x^2 - x - 2|x-1|) \leq 0.$$

$$6. |(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)| \leq 24.$$

4

Самостоятельные работы

Самостоятельная работа 1

Вариант 1

$$1. \frac{(x-2)(x-5)}{(x+1)(x-3)} \geq 0;$$

$$2. \frac{(x+5)(x-3)}{(x+4)(x-2)} \leq 0;$$

$$3. \frac{4(2x+3)(x-1)}{5x-3} > 0;$$

$$4. \frac{(x-4)^2}{(x+2)(x-6)} \geq 0;$$

$$5. \frac{x(x+6)}{(x+5)^2(x-1)} \leq 0;$$

$$8. \frac{(x^2+8x-9)(x-1)^3}{(x+2)^2(3-x)} \geq 0;$$

$$6. \frac{(x^2+x-6)(x+2)}{x(1-x^2)} \geq 0;$$

$$9. x+2 \leq \frac{9}{x+2};$$

$$7. \frac{x(4-x^2)}{(x^2-x-6)(3-x)^2} \leq 0;$$

$$10. \frac{3}{x^2-4x+3} \geq 1.$$

Вариант 2

$$1. \frac{(x+2)(x+5)}{(x-1)(x+3)} \geq 0;$$

$$2. \frac{(x-5)(x+3)}{(x-4)(x+2)} \leq 0;$$

$$3. \frac{4(2x-3)(x+1)}{5x+3} < 0;$$

$$4. \frac{(x+4)^2}{(x-2)(x+6)} \geq 0;$$

$$5. \frac{x(x-6)}{(x-5)^2(x+1)} \geq 0;$$

$$6. \frac{(x^2-x-6)(x-2)}{x(1-x^2)} \geq 0;$$

$$7. \frac{x(x^2-4)}{(x^2+x-6)(3+x)^2} \leq 0;$$

$$8. \frac{(x^2-8x-9)(-x-1)^3}{(2-x)^2(x+3)} \geq 0;$$

$$9. 2-x \leq \frac{9}{2-x};$$

$$10. \frac{3}{x^2+4x+3} \geq 1.$$

*Самостоятельная работа 2***Вариант 1**

1. $\frac{(x-1)^2}{(x-7)(x+6)} \leq 0;$
2. $\frac{(x^2+x-6)(x-2)}{x(1-x^2)} \geq 0;$
3. $(x-1)(x-2)(2x-3) < (x-1)(x-2)^2;$
4. $\frac{(x^2-6x+8)(x^2-4)}{(x^3-8)x} \geq 0;$
5. $\frac{x^2+3x+2}{(x+3)(x+4)} \leq 1;$
5. $\frac{4}{4+3x-x^2} \leq 1;$
7. $\left(\frac{4-x}{x+2}\right)^2 \geq 4;$
8. $\frac{x-3}{x+2} \geq \frac{x+4}{x-2};$
9. $\frac{2(x-2)^2+3(x-2)+1}{x^4-5x^2+4} \leq 0;$
10. $x^2-x \geq \frac{36}{x^2-x}.$

Вариант 2

1. $\frac{(x+1)^2}{(x+7)(x-6)} \leq 0;$
2. $\frac{(x^2-x-6)(x+2)}{x(1-x^2)} \geq 0;$
3. $(x+1)(x+2)(2x+3) > (x+1)(x+2)^2;$
4. $\frac{(x^2+6x+8)(x^2-4)}{(x^3+8)x} \geq 0;$
5. $\frac{x^2-3x+2}{(x-3)(x-4)} \leq 1;$
5. $\frac{4}{4-3x-x^2} \leq 1;$
7. $\left(\frac{4+x}{2-x}\right)^2 \geq 4;$
8. $\frac{x+3}{x-2} \geq \frac{x-4}{x+2};$
9. $\frac{2(x+2)^2-3(x+2)+1}{x^4-5x^2+4} \leq 0;$
10. $x^2+x \geq \frac{36}{x^2+x}.$

*Самостоятельная работа 3***Вариант 1**

1. $|x - 4| < 1$;
2. $|x^2 - 3x| > -1$;
3. $|2x + 3| \geq 5$;
4. $|x^2 + 6x - 7| \leq 0$;
5. $\left| \frac{3x - 1}{x + 2} \right| \leq 2$;
6. $\frac{(x + 2)^2 (x + 3)}{|x^2 + x - 2|} \geq 0$;
7. $\frac{|x^2 - x - 12|}{x^4 - 5x^3 + 6x^2} \leq 0$;
8. $\frac{|x + 1| - 2}{x - 2} \geq 2$;
9. $|x^2 - 1| + |x^2 - x - 2| \leq 0$;
10. $|2x^2 - x| \leq \frac{9}{|2x^2 - x|}$.

Вариант 2

1. $|x + 4| < 1$;
2. $|x^2 + 3x| \geq -1$;
3. $|2x - 3| \geq 5$;
4. $|x^2 - 6x - 7| \leq 0$;
5. $\left| \frac{3x + 1}{x - 2} \right| \leq 2$;
6. $\frac{(x - 2)^2 (x - 3)}{|x^2 - x - 2|} \leq 0$;
7. $\frac{|x^2 + x - 12|}{x^4 + 5x^3 + 6x^2} \leq 0$;
8. $\frac{2 - |x - 1|}{x + 2} \geq 2$;
9. $|x^2 - 1| + |x^2 + x - 2| \leq 0$;
10. $|2x^2 + x| \leq \frac{9}{|2x^2 + x|}$.

*Самостоятельная работа 4***Вариант 1**

1. $(3x - 4)(x + 2)(3 - x)(x + \sqrt{2}) < 0;$
2. $4x^2 - 3x - 1 \leq 0;$
3. $(2x - 1)(x + 1) \geq (3 + x)(3 - x);$
4. $\frac{x^2 - 2x - 15}{(x + 2)(1 - x)} \leq 0;$
5. $\frac{x^2}{x + 2} \geq 1;$
6. $\frac{x}{x + 5} < \frac{x + 6}{x - 5};$
7. $\frac{(1 - x)(1 - 2x)^2}{(x + 3)(2x - 3)^3} \geq 0;$
8. $\frac{(x^2 - 8x + 15)(x^2 - 5x)}{4 + 3x - x^2} \geq 0;$
9. $\frac{|x + 3|}{x^2 + x - 12} \geq 0;$
10. $\frac{3x^2 - 4x + 1}{|x| - 1} \geq 0.$

Вариант 2

1. $(3x + 4)(x - 2)(3 + x)(\sqrt{2} - x) < 0;$
2. $4x^2 + 3x - 1 \leq 0;$
3. $(2x + 1)(x - 1) \geq (3 + x)(3 - x);$
4. $\frac{x^2 + 2x - 15}{(2 - x)(x + 1)} \leq 0;$
5. $\frac{x^2}{2 - x} \geq 1;$
6. $\frac{x}{x - 5} < \frac{x - 6}{x + 5};$
7. $\frac{(1 - 2x)(1 - 3x)^2}{(x + 2)(2x - 5)^3} \geq 0;$
8. $\frac{(x^2 + 8x + 15)(x^2 + 5x)}{4 - 3x - x^2} \geq 0;$
9. $\frac{|x - 3|}{x^2 - x - 12} \geq 0;$
10. $\frac{3x^2 + 4x + 1}{|x| - 1} \geq 0.$

*Самостоятельная работа 5***Вариант 1**

1. $(4x - 7)(x + 4)(2 - x)(x - \sqrt{3}) < 0;$

2. $(1 - \sqrt{2})(x^2 - 5) \geq \sqrt{2} - 1;$

3. $\frac{3x^2 - x - 14}{2x^2 + x - 10} \leq 0;$

4. $\frac{3x^2 - 5x + 3}{-x^2 + 5x + 6} \geq 0;$

5. $\frac{x^2}{x^2 + 4} \geq \frac{x^2 + 6}{x^2 - 4};$

6. $\frac{(2 - x)(x + 0,25)^3(3x + 1)^2(x + 2)}{|x + 3|} \geq 0;$

7. $\frac{x^3}{3 - 2x} \leq 1;$

9. $\frac{|x^2 - 4x|}{x^2 - 5x - 6} \geq 0;$

8. $\frac{x^2}{x + 3} \leq \frac{x^2 - 4x}{x - 2};$

10. $\frac{x^4 - 5x^2 + 4}{|x^2 - 5x| - 6} \geq 0.$

Вариант 2

1. $(2x - 5)(x - \sqrt{6})(x + 3)(4 - x) < 0;$

2. $(\sqrt{3} - 2)(x^2 - 10) \geq 2 - \sqrt{3};$

3. $\frac{3x^2 + x - 14}{2x^2 - x - 10} \leq 0;$

4. $\frac{3x^2 + 5x + 3}{6 - 5x - x^2} \geq 0;$

5. $\frac{x^2 - 9}{x^2 - 1} \geq \frac{x^2 - 6}{x^2};$

6. $\frac{(3 - x)(x - 0,25)^2(3x - 1)^3(x + 3)}{|x + 4|} \geq 0;$

7. $\frac{x^3}{3 + 2x} \geq -1;$

9. $\frac{|x^2 + 4x|}{x^2 + 5x - 6} \geq 0;$

8. $\frac{x^2}{x - 3} \leq \frac{x^2 + 4x}{x + 2};$

10. $\frac{x^4 - 5x^2 + 4}{6 - |x^2 + 5x|} \leq 0.$

*Самостоятельная работа 6***Вариант 1**

1. $\frac{40}{40+3x-x^2} \geq 1;$

3. $\frac{x^3}{3-2x^2} > 1;$

2. $\frac{1}{3x-5} \leq \frac{1}{x^2-2x+1};$

4. $\frac{4x^2+13x+10}{4x+5} \leq \frac{1}{2x+3};$

5. $\frac{4x^4-5x^2+1}{2x^2-3x-5} \geq 2x^2+3x-5;$

6. $x^2-5|x| \geq 6;$

7. $\left| \frac{3+x}{1-x} \right| \leq 1;$

9. $\frac{2|x|-1}{2|x|-3} \geq \frac{|x|-1}{|x|-4};$

8. $\frac{|x^2-x|}{8+2|x|-x^2} > 0;$

10. $|x^2-5|x|| \leq 6.$

Вариант 2

1. $\frac{5}{5+4x-x^2} \leq 1;$

3. $\frac{x^3}{4-3x^2} > 1;$

2. $\frac{-1}{3x+5} \leq \frac{1}{x^2+2x+1};$

4. $\frac{4x^2-13x+10}{4x-5} \geq \frac{1}{2x-3};$

5. $\frac{4x^4-5x^2+1}{2x^2+3x-5} \geq 2x^2-3x-5;$

6. $x^2-4|x| \geq 5;$

7. $\left| \frac{3+x}{x+1} \right| \leq 1;$

9. $\frac{3|x|-2}{3|x|-4} \geq \frac{|x|-1}{|x|-3};$

8. $\frac{|x^2+x|}{6+|x|-x^2} > 0;$

10. $|x^2-4|x|| \leq 3.$

*Самостоятельная работа 7***Вариант 1**

1. $\frac{7-5x}{x^2-5x+6} \leq 1;$

3. $\frac{x^3+2}{2x^2+x} \leq 1;$

2. $\frac{2(2x-1)}{2x^2-3x-5} \leq \frac{3(2x-1)}{3x^2+5x-2};$

4. $\frac{5x+4}{10x^2+13x+4} \leq 3x+2;$

5. $\frac{3x^2+7x-2}{9x^4-10x^2+1} \leq \frac{1}{3x^2-7x+2};$

6. $\left| \frac{x^2+4}{x^2-3x-4} \right| \leq 1;$

9. $\frac{4}{|x-3|-1} \geq |x-2|;$

7. $\frac{|x^2-1|-3}{2x^2-5x+2} \geq 0;$

10. $\frac{|x^2-4x|-5}{|x-2|-3} \geq 1;$

8. $\frac{|x-3|-2|x+1|}{x^2-x-6} \geq 0;$

Вариант 2

1. $\frac{7+5x}{x^2+5x+6} \leq 1;$

3. $\frac{2-x^3}{2x^2-x} \leq 1;$

2. $\frac{2(2x+1)}{2x^2+3x-5} \geq \frac{3(2x+1)}{3x^2-5x-2};$

4. $\frac{5x-4}{10x^2-13x+4} \geq 3x-2;$

5. $\frac{3x^2-7x-2}{9x^4-10x^2+1} \leq \frac{1}{3x^2+7x+2};$

6. $\left| \frac{x^2+5}{x^2+4x-5} \right| \leq 1;$

9. $\frac{4}{|x+3|-1} \geq |x+2|;$

7. $\frac{2x^2+5x+2}{|x^2-1|-3} \geq 0;$

10. $\frac{|x^2+4x|-5}{|x+2|-3} \geq 1.$

8. $\frac{|x+3|-2|x-1|}{x^2+x-6} \geq 0;$

Самостоятельная работа 8

Вариант 1

$$1. \frac{(3x+7)(x-3)^2}{(5-x^2)^3} < 0;$$

$$2. \frac{x^2+3x-13}{(x+3)(x-2)} \geq 2;$$

$$3. (|x|-1)^2(x^2-2) < (|x|-1)^2(6-2x);$$

$$4. \frac{x(9-x^2)|x^2-16|}{(x^2+6x-7)(x-1)} \geq 0;$$

$$5. \frac{(x^2+7x-8)^2+(x^3+2x-3)^2}{|x|-2} \geq 0;$$

$$6. \frac{x^2-1}{|x|-1} \leq 3;$$

$$7. \frac{|x-1|}{x^2-|x|} < 1;$$

$$8. \begin{cases} \frac{10}{x+5} + \frac{x^3+3x^2-17x+11}{2x^2+9x-5} > 0; \\ x^3+5x^2-6|x| \leq 0 \end{cases};$$

$$9. |x^2-x| \leq \frac{36}{x^2-x};$$

$$10. \frac{|3x^2-4x+1|}{3x-1} \leq \frac{1}{2|x|-1}.$$

Вариант 2

$$1. \frac{(7-3x)(x+3)^2}{(5-x^2)^3} < 0;$$

$$2. \frac{x^2-3x-13}{(x-3)(x+2)} \geq 2;$$

$$3. (2|x|-1)^2(2x^2-1) < (2|x|-1)^2(3+2x);$$

$$4. \frac{x(9-x^2)|x^2-16|}{(x^2-6x-7)(x+1)} \geq 0;$$

$$5. \frac{(x^2-7x-8)^2 + (x^2-2x-3)^2}{|x|-2} \geq 0;$$

$$6. \frac{4x^2-1}{2|x|-1} \leq 3;$$

$$7. \frac{|x+1|}{x^2-|x|} < 1;$$

$$8. \begin{cases} \frac{10}{5-x} - \frac{x^3-3x^2-17x-11}{2x^2-9x-5} > 0; \\ x^3-5x^2+6|x| \geq 0 \end{cases}$$

$$9. |x^2+x| \leq \frac{36}{x^2+x};$$

$$10. \frac{|3x^2+4x+1|}{3x+1} \leq \frac{1}{1-2|x|}.$$

Самостоятельная работа 9

Вариант 1

1. $\begin{cases} \frac{x-3}{3} - \frac{2-2x}{5} < \frac{1}{2}, \\ 2x^2 - x - 6 \leq 0; \end{cases}$
2. $\begin{cases} 3x^2 + 4x + 1 \geq 0, \\ 3x^2 + 5x + 2 < 0; \end{cases}$
3. $\begin{cases} x^2 + 7x - 18 \leq 0, \\ (x+1)^2 - 4(x+1) + 3 \geq 0; \end{cases}$
4. $\begin{cases} \frac{x^2-8}{2x+7} > 1, \\ \frac{6+x}{2} - \frac{3x+2}{5} \leq 2x+9; \end{cases}$
5. $\begin{cases} \frac{x^2+5x+11}{x^2+x-2} + \frac{7}{1-x} \leq 0, \\ \frac{2x^2+6x+6}{x^2+4x+3} + \frac{3x+8}{x+3} \geq 0; \end{cases}$
6. $\begin{cases} 2x^2 - x \leq \frac{9}{2x^2 - x}, \\ \frac{|x-1|}{x^2 - x - 6} \geq 0; \end{cases}$
7. $\begin{cases} \frac{x-2}{x^2-3x} > \frac{x-2}{4}, \\ |2x-5| \leq \frac{3}{x}; \end{cases}$
8. $\begin{cases} \frac{x^2+2x}{x-1} \geq \frac{x}{x+1}, \\ \left| \frac{x+3}{x-1} \right| \geq x; \end{cases}$
9. $\begin{cases} \left(\frac{12x-3}{(x+1)(2x+3)} - 1 \right) (x+1 - |2x-1|) (2-x) \leq 0, \\ x^2 - 3x > \frac{16}{x^2 - 3x}; \end{cases}$
10. $\begin{cases} (x^2 + 5x + 6) (x^2 + 5x + 8) < 8, \\ (x^2 - 1) (x^2 + 4) \leq 6. \end{cases}$

Вариант 2

1. $\begin{cases} \frac{x+3}{3} + \frac{2+2x}{5} > -\frac{1}{2}, \\ 2x^2 + x - 6 \leq 0; \end{cases}$
2. $\begin{cases} 3x^2 - 4x + 1 \geq 0, \\ 3x^2 - 5x + 2 < 0; \end{cases}$
3. $\begin{cases} x^2 - 7x - 18 \leq 0, \\ (x-1)^2 + 4(x-1) + 3 \geq 0; \end{cases}$
4. $\begin{cases} \frac{x^2-8}{7-2x} > 1, \\ \frac{6-x}{2} + \frac{3x-2}{5} \leq 9-2x; \end{cases}$
5. $\begin{cases} \frac{x^2-5x+11}{x^2-x-2} + \frac{7}{1+x} \leq 0, \\ \frac{2x^2-6x+6}{x^2-4x+3} + \frac{3x-8}{x-3} \geq 0; \end{cases}$
6. $\begin{cases} 2x^2 + x \leq \frac{9}{2x^2 + x}, \\ \frac{|x+1|}{x^2+x-6} \geq 0; \end{cases}$
7. $\begin{cases} \frac{x+2}{x^2+3x} < \frac{x+2}{4}, \\ |2x+5| \leq -\frac{3}{x}; \end{cases}$
8. $\begin{cases} \frac{x^2-2x}{x+1} \leq \frac{x}{1-x}, \\ \left| \frac{x-3}{x+1} \right| \geq -x; \end{cases}$
9. $\begin{cases} \left(\frac{12x+3}{(x-1)(2x-3)} + 1 \right) (1-x-|2x+1|) (2+x) \geq 0, \\ x^2+3x > \frac{16}{x^2+3x}; \end{cases}$
10. $\begin{cases} (x^2-5x+6)(x^2-5x+8) < 8, \\ (x^2-1) \leq \frac{6}{x^2+4}. \end{cases}$

*Самостоятельная работа 10***1 вариант**

1. $\frac{6x^5 - 11x^4 - 11x + 6}{(2x^2 + 3x + 1)^2} \geq 0;$
2. $\frac{(x+1)^6 - (x^2+1)^3}{x^4 - 5x^2 + 4} \leq 0;$
3. $x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 \geq 0;$
4. $\frac{2x}{4x^2 + 3x + 8} + \frac{3x}{4x^2 - 6x + 8} > \frac{1}{6};$
5. $32x^4 - 48x^3 - 10x^2 + 21x + 5 < 0;$
6. $\left(\frac{x}{x-1}\right)^2 + \left(\frac{x}{x+1}\right)^2 \leq \frac{10}{9};$
7. $(x^2 + 2x - 1)(2x^2 + 4x - 1) \leq 10;$
8. $\frac{x^3 + 2x - 2}{x^3 + 2x - 3} \geq \frac{x^3 + x + 3}{x^3 + x + 2};$
9. $\frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1} + \frac{x^2 + 8x + 20}{x + 4} > \frac{x^2 + 4x + 6}{x + 2} + \frac{x^2 + 6x + 12}{x + 3};$
10. $\frac{4x^2}{(x+2)^2} + x^2 < 5.$

2 вариант

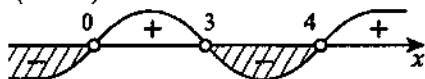
1. $\frac{6x^5 + 11x^4 - 11x - 6}{(2x^2 - 3x + 1)^2} \leq 0;$
2. $\frac{(x-1)^6 - (x^2 + 1)^3}{x^4 - 5x^2 + 4} \leq 0;$
3. $x^4 + 10x^3 + 35x^2 + 50x + 24 \geq 0;$
4. $\frac{2x}{4x^2 - 3x + 8} + \frac{3x}{4x^2 + 6x + 8} < -\frac{1}{6};$
5. $32x^4 + 48x^3 - 10x^2 - 21x + 5 < 0;$
6. $\left(\frac{2x}{2x+1}\right)^2 + \left(\frac{2x}{2x-1}\right)^2 \leq \frac{10}{9};$
7. $(x^2 - 2x - 1)(2x^2 - 4x - 1) \leq 10;$
8. $\frac{x^3 + 2x + 2}{x^3 + 2x + 3} \geq \frac{x^3 + x - 3}{x^3 + x - 2};$
9. $\frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} + \frac{x^2 - 8x + 20}{x - 4} \leq \frac{x^2 - 4x + 6}{x - 2} + \frac{x^2 - 6x + 12}{x - 3};$
10. $x^2 + \frac{4x^2}{(x-2)^2} < 5.$

5

Решения и ответы

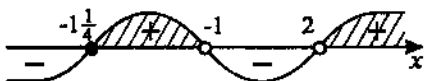
Решение проверочной работы 1

1. $\frac{x-4}{(x-3)x} < 0.$



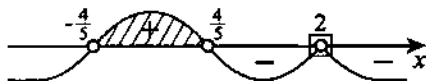
Ответ: $(-\infty; 0) \cup (3; 4).$

2. $\frac{5+4x}{(x-2)(x+1)} \geq 0.$



Ответ: $\left[-1\frac{1}{4}; -1\right) \cup (2; +\infty).$

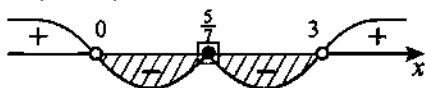
3. $\frac{16-25x^2}{x^2-4x+4} > 0.$
 $\frac{(4-5x)(4+5x)}{(x-2)^2} > 0.$



Ответ: $\left(-\frac{4}{5}; \frac{4}{5}\right).$

$$4. \frac{49x^2 - 70x + 25}{x^2 - 3x} \leq 0.$$

$$\frac{(7x - 5)^2}{x(x - 3)} \leq 0.$$



Ответ: $(0; 3)$.

$$5. \frac{4x - 3}{x - 5} > 5.$$

$$\frac{4x - 3 - 5(x - 5)}{x - 5} > 0; \frac{4x - 3 - 5x + 25}{x - 5} > 0; \frac{22 - x}{x - 5} > 0$$



Ответ: $(5; 22)$.

$$6. \frac{6x + 1}{4x - 3} \leq \frac{3x + 2}{2x + 1}.$$

$$\frac{(6x + 1)(2x + 1) - (3x + 2)(4x - 3)}{(4x - 3)(2x + 1)} \leq 0;$$

$$\frac{12x^2 + 8x + 1 - 12x^2 + x + 6}{(4x - 3)(2x + 1)} \leq 0; \frac{9x + 7}{(4x - 3)(2x + 1)} \leq 0.$$



Ответ: $\left(-\infty; -\frac{7}{9}\right] \cup \left(-\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right)$.

$$7. \frac{6}{-4x + 2} - \frac{5x}{1 - 2x} \leq 0.$$

$$\frac{6}{2(1 - 2x)} - \frac{5x}{1 - 2x} \leq 0; \frac{3 - 5x}{1 - 2x} \leq 0; \frac{5x - 3}{2x - 1} \leq 0.$$



Ответ: $\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{5}\right]$.

$$8. \frac{x^2 + 3x - 2}{(x-1)^2 - 9} - \frac{3x+1}{3x-12} \leq 0.$$

$$\frac{x^2 + 3x - 2}{(x-1+3)(x-1-3)} - \frac{3x+1}{3(x-4)} \leq 0;$$

$$\frac{x^2 + 3x - 2}{(x+2)(x-4)} - \frac{3x+1}{3(x-4)} \leq 0;$$

$$\frac{3x^2 + 9x - 6 - (3x+1)(x+2)}{3(x+2)(x-4)} \leq 0;$$

$$\frac{3x^2 + 9x - 6 - 3x^2 - 7x - 2}{3(x+2)(x-4)} \leq 0;$$

$$\frac{2x-8}{3(x+2)(x-4)} \leq 0.$$

$$\begin{cases} x \neq 4, \\ \frac{1}{x+2} \leq 0. \end{cases}$$



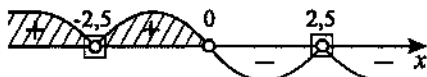
Ответ: $(-\infty; -2)$.

$$9. \frac{1}{2x^2 - 5x} - \frac{2}{25 + 10x} + \frac{4}{25 - 4x^2} \geq 0.$$

$$\frac{1}{x(2x-5)} - \frac{2}{5(5+2x)} + \frac{4}{(5+2x)(5-2x)} \geq 0;$$

$$\frac{5(2x+5) - 2x(2x-5) - 4 \cdot 5x}{5x(2x-5)(2x+5)} \geq 0;$$

$$\frac{-4x^2 + 25}{5x(2x-5)(2x+5)} \geq 0; \quad \frac{(5+2x)(5-2x)}{5x(2x-5)(2x+5)} \geq 0.$$



Ответ: $(-\infty; -2,5) \cup (-2,5; 0)$.

$$10. \left(\frac{4}{x^2 + 4x} + \frac{32 - 3x}{x^3 + 64} \right) : \frac{x+8}{x^3 - 4x^2 + 16x} \geq \frac{4}{4+x}.$$

$$\left(\frac{4}{x(x+4)} + \frac{32-3x}{(x+4)(x^2-4x+16)} \right) \cdot \frac{x(x^2-4x+16)}{x+8} - \frac{4}{4+x} \geq 0;$$

$x \neq -8$.

$$\frac{4(x^2 - 4x + 16) + (32 - 3x)x}{x(x+4)(x^2 - 4x + 16)} \cdot \frac{x(x^2 - 4x + 16)}{x+8} - \frac{4}{4+x} \geq 0;$$

$$\frac{(x^2 + 16x + 64)x(x^2 - 4x + 16)}{(x+8)x(x+4)(x^2 - 4x + 16)} - \frac{4}{4+x} \geq 0 \quad (x \neq 0);$$

$$\frac{(x+8)^2}{(x+4)(x+8)} - \frac{4}{4+x} \geq 0 \quad (\text{так как } x^2 - 4x + 16 > 0 \text{ при всех } x).$$

$$\frac{x+8}{x+4} - \frac{4}{4+x} \geq 0; \quad \frac{x+8-4}{x+4} \geq 0; \quad \frac{x+4}{x+4} \geq 0;$$

$$1 \geq 0, \text{ но } \begin{cases} x \neq 0, \\ x \neq -4, \\ x \neq -8. \end{cases}$$



Ответ: $(-\infty; -8) \cup (-8; -4) \cup (-4; 0) \cup (0; +\infty)$.

Решение проверочной работы 2

1. $(x^2 + x + 2)(x + 2)(1 - x)^2 > 0$.

$x^2 + x + 2 > 0$ (при всех x), так как $\begin{cases} a = 1 > 0, \\ D = -7 < 0; \end{cases}$

$(x + 2)(1 - x)^2 > 0$.

Так как $(1 - x)^2 = (x - 1)^2$, то вид неравенства канонический.



Ответ: $(-2; 1) \cup (1; +\infty)$.

2. $(x^4 - x^2 + 2)(x^2 + x - 2)^2 \leq 0$.

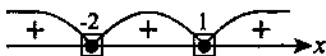
$x^2 = t$; $x^4 - x^2 + 2 = t^2 - t + 2$, но $t^2 - t + 2 > 0$ (при всех t),

так как $\begin{cases} a = 1 > 0, \\ D = -7 < 0; \end{cases}$

$((x + 2)(x - 1))^2 \leq 0$. $(x^2 + x - 2) = (x + 2)(x - 1)$,

$x_1 = -2$; $x_2 = 1$.

Корни $x_1 = -2$; $x_2 = 1$ есть решение неравенства.



Ответ: $\{-2; 1\}$.

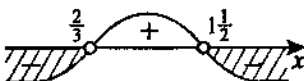
3. $(1 - x^2)^3(x^2 + 5x) > 0$.

$(1 - x)^3(1 + x)^3 \cdot x(x + 5) > 0$ — вид неканонический.



Ответ: $(-5; -1) \cup (0; 1)$.

4. $(3x - 2)(3 - 2x) < 0$.

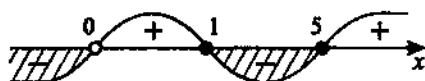


Ответ: $(-\infty; \frac{2}{3}) \cup (1\frac{1}{2}; +\infty)$.

5. $x + \frac{5}{x} \leq 6.$

$$\frac{x^2 - 6x + 5}{x} \leq 0; \quad x^2 - 6x + 5 = (x - 5)(x - 1);$$

$$\frac{(x - 5)(x - 1)}{x} \leq 0.$$



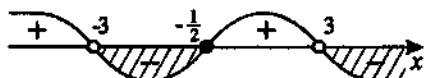
Ответ: $(-\infty; 0) \cup [1; 5].$

6. $\frac{x - 2}{x + 3} \leq \frac{x + 4}{x - 3}.$

$$\frac{(x - 2)(x - 3) - (x + 3)(x + 4)}{(x + 3)(x - 3)} \leq 0;$$

$$\frac{x^2 - 5x + 6 - x^2 - 7x - 12}{(x + 3)(x - 3)} \leq 0;$$

$$\frac{-6 - 12x}{(x + 3)(x - 3)} \leq 0; \quad \frac{-6(2x + 1)}{(x + 3)(x - 3)} \leq 0.$$

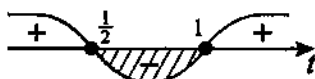


Ответ: $\left(-3; -\frac{1}{2}\right] \cup (3; +\infty).$

7. $2(x + 2)^2 - 3(x + 2) + 1 \leq 0.$

Пусть $x + 2 = t$; $2t^2 - 3t + 1 \leq 0.$

Так как $2t^2 - 3t + 1 = 2(t - 1)\left(t - \frac{1}{2}\right)$, то



$$\begin{cases} t \leq 1, \\ t \geq \frac{1}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} x + 2 \leq 1, \\ x + 2 \geq \frac{1}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq -1, \\ x \geq -1,5. \end{cases}$$

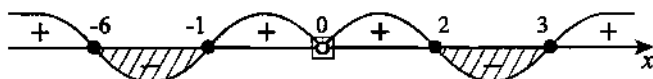
Ответ: $[-1,5; -1].$

$$8. \left(x + \frac{6}{x}\right)^2 + 2\left(x + \frac{6}{x}\right) - 35 \leq 0.$$

Пусть $x + \frac{6}{x} = t$.

$$\begin{aligned} t^2 + 2t - 35 &= (t+7)(t-5) = \left(x + \frac{6}{x} + 7\right) \left(x + \frac{6}{x} - 5\right) = \\ &= \frac{x^2 + 7x + 6}{x} \cdot \frac{x^2 - 5x + 6}{x}. \end{aligned}$$

Так как $x^2 + 7x + 6 = (x+1)(x+6)$ и $x^2 - 5x + 6 = (x-3)(x-2)$, то $\frac{(x+6)(x+1)(x-3)(x-2)}{x^2} \leq 0$.



Ответ: $[-6; -1] \cup [2; 3]$.

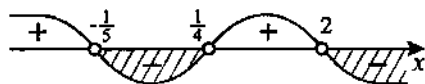
$$9. \frac{(-20x^2 + x + 1)(x - 2)}{x^2 + 3} < 0.$$

Пусть $20x^2 - x - 1 = 0$.

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 80}}{40}; \quad x_1 = \frac{1}{4}, \quad x_2 = -\frac{1}{5}.$$

$$-20x^2 + x + 1 = -20\left(x - \frac{1}{4}\right)\left(x + \frac{1}{5}\right);$$

$x^2 + 3 > 0$ (при всех x).



Ответ: $\left(-\frac{1}{5}; \frac{1}{4}\right) \cup (2; +\infty)$.

$$10. \frac{(1-x^8)(1-x^6)(1-x^4)}{(1-x^3)(1+2x)^3} \leq 0.$$

$$1-x^8 = (1-x^4)(1+x^4) = (1+x^2)(1+x^4)(1-x^2);$$

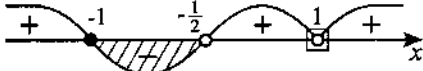
$$1-x^6 = (1-x^3)(1+x^3) = (1-x)(1+x+x^2)(1+x)(1-x+x^2).$$

$$1+x^4 > 0 \quad (\text{при всех } x), \quad 1+x^2 > 0 \quad (\text{при всех } x),$$

$$x^2+x+1 > 0 \quad (\text{при всех } x), \quad x^2-x+1 > 0 \quad (\text{при всех } x),$$

$$(1-x)^2 = (x-1)^2.$$

$$\frac{(1-x^2)(1-x)(1+x)(1-x^2)}{(1-x)(1+x+x^2)(1+2x)^3} \leq 0;$$

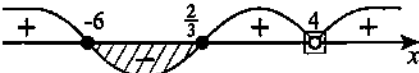
$$\frac{(1-x)^3(1+x)^3}{(1-x)(1+2x)^3} \leq 0.$$


Ответ: $\left[-1; -\frac{1}{2}\right).$

11. $\left(\frac{x+1}{4-x}\right)^2 \leq \frac{1}{4}.$

$$\left(\frac{x+1}{4-x} - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{x+1}{4-x} + \frac{1}{2}\right) \leq 0;$$

$$\frac{2(x+1) - (4-x)}{4-x} \cdot \frac{2(x+1) + 4-x}{4-x} \leq 0;$$

$$\frac{(3x-2)(x+6)}{(4-x)^2} \leq 0.$$


Ответ: $\left[-6; \frac{2}{3}\right).$

12. $\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^2 \leq \frac{x^2-6x+8}{x^2-x-2}.$

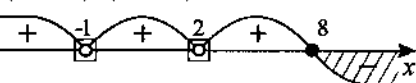
$$x^2-6x+8 = (x-4)(x-2), \quad x^2-x-2 = (x-2)(x+1).$$

$$\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^2 - \frac{x^2-6x+8}{x^2-x-2} \leq 0; \quad \frac{x-2}{x+1} \cdot \left(\frac{x-2}{x+1} - \frac{x-4}{x-2}\right) \leq 0;$$

$$\frac{x-2}{x+1} \cdot \frac{(x-2)^2 - (x-4)(x+1)}{(x+1)(x-2)} \leq 0;$$

$$\frac{(x-2)(x^2-4x+4-x^2+3x+4)}{(x+1)^2(x-2)} \leq 0;$$

$$\frac{(x-2)(8-x)}{(x+1)^2(x-2)} \leq 0.$$



Ответ: $[8; +\infty).$

Решение проверочной работы 3

$$1. \frac{(3x+7)(x-3)^2}{5-x^2} \geq 0.$$

$$\begin{cases} x = \sqrt{5} \\ x = -\sqrt{5} \end{cases} \text{ — корни знаменателя. } x = -2\frac{1}{3} \text{ — корень}$$

числителя. Выясним, что больше, $-\sqrt{5}$ или $-2\frac{1}{3}$.

Рассмотрим $-2\frac{1}{3} - (-\sqrt{5}) = \sqrt{5} - 2\frac{1}{3}$. Допустим, что $\sqrt{5} \geq \frac{7}{3}$;

$5 \geq \frac{49}{9} = 5\frac{4}{9}$ — ложь, значит $\sqrt{5} < 2\frac{1}{3}$, тогда $-\sqrt{5} > -2\frac{1}{3}$.

$$\frac{(3x+7)(x-3)^2}{(\sqrt{5}-x)(\sqrt{5}+x)} \geq 0.$$



$$\text{Ответ: } \left(-\infty; -2\frac{1}{3}\right] \cup (-\sqrt{5}; \sqrt{5}) \cup \{3\}.$$

$$2. \frac{(3x - \sqrt{11})((\sqrt{3} - 2)x - (2 - \sqrt{3})^2)}{(\sqrt{2} - x)(\sqrt{32}x + 4)} \leq 0.$$

$$(2 - \sqrt{3})^2 = (\sqrt{3} - 2)^2;$$

$$\frac{3\left(x - \frac{\sqrt{11}}{3}\right)(\sqrt{3} - 2)(x - (\sqrt{3} - 2))}{(\sqrt{2} - x)(4\sqrt{2}x + 4)} \leq 0 \quad (\sqrt{3} < 2);$$

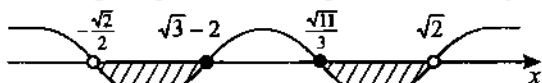
$$\frac{3\left(x - \frac{\sqrt{11}}{3}\right)(x - (\sqrt{3} - 2))}{(x - \sqrt{2})4\sqrt{2}\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)} \leq 0.$$

$$\text{Рассмотрим } (\sqrt{3} - 2) - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{3} - 2 + \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Допустим, $\sqrt{3} > 2 - \frac{\sqrt{2}}{2}$, тогда $2\sqrt{3} > 4 - \sqrt{2}$.

Возведем в квадрат $12 > 16 - 8\sqrt{2} + 2$; $8\sqrt{2} > 6$;
 $4\sqrt{2} > 3$; $32 > 9$ — истина.

Тогда распределение корней на оси будет таким:



Ответ: $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \sqrt{3}-2\right] \cup \left[\frac{\sqrt{11}}{3}; \sqrt{2}\right)$.

3. $\frac{(6x^2 - 5x - 1)(16x^2 + 2x - 5)}{(9x^2 + 6x + 1)(-2x^2 + x + 3)} \leq 0$.

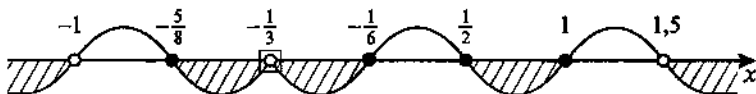
а) $6x^2 - 5x - 1 = (x - 1)(6x + 1)$.

б) $16x^2 + 2x - 5 = (2x - 1)(8x + 5)$.

в) $9x^2 + 6x + 1 = (3x + 1)^2$.

г) $-2x^2 + x + 3 = -(x + 1)(2x - 3)$.

$$\frac{(x - 1)(6x + 1)(2x - 1)(8x + 5)}{-(3x + 1)^2(x + 1)(2x - 3)} \leq 0.$$



Ответ: $(-\infty; -1) \cup \left[-\frac{5}{8}; -\frac{1}{3}\right) \cup \left(-\frac{1}{3}; -\frac{1}{6}\right] \cup \left[\frac{1}{2}; 1\right] \cup (1.5; \infty)$.

4. $\frac{2x + 3}{12 - x - x^2} + 0,5 \geq 0$.

$$\frac{4x + 6 + 12 - x - x^2}{12 - x - x^2} \geq 0; \quad \frac{-x^2 + 3x + 18}{-x^2 - x + 12} \geq 0;$$

$$\frac{(x - 6)(x + 3)}{(x + 4)(x - 3)} \geq 0.$$



Ответ: $(-\infty; -4) \cup [-3; 3) \cup [6; \infty)$.

$$5. \frac{3x+9}{3x^2-4x+1} \geq \frac{6x+18}{6x^2+7x+1}.$$

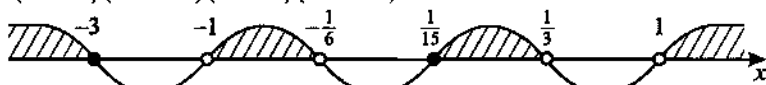
$$3(x+3) \left(\frac{1}{3x^2-4x+1} - \frac{2}{6x^2+7x+1} \right) \geq 0;$$

$$\frac{3(x+3)(6x^2+7x+1-6x^2+8x-2)}{(3x^2-4x+1)(6x^2+7x+1)} \geq 0.$$

$$a) 3x^2-4x+1 = (x-1)(3x-1);$$

$$b) 6x^2+7x+1 = (x+1)(6x+1).$$

$$\frac{3(x+3)(15x-1)}{(x-1)(3x-1)(x+1)(6x+1)} \geq 0.$$



$$\text{Ответ: } (-\infty; -3] \cup \left(-1; -\frac{1}{6}\right] \cup \left[\frac{1}{15}; \frac{1}{3}\right) \cup (1; \infty).$$

$$6. (x^2+4x)^2 - 17(x^2+4x) + 60 \leq 0.$$

Пусть $x^2+4x = t$, тогда

$$t^2 - 17t + 60 \leq 0; \quad (t-5)(t-12) \leq 0.$$

$$(x^2+4x-5)(x^2+4x-12) \leq 0;$$

$$(x+5)(x-1)(x+6)(x-2) \leq 0;$$



$$\text{Ответ: } [-6; -5] \cup [1; 2].$$

$$7. x(x+1)(x+2)(x+3) \geq 24.$$

$$x(x+3) = x^2+3x; \quad (x+1)(x+2) = x^2+3x+2.$$

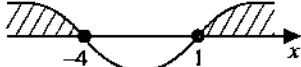
Положим $x^2+3x = t$.

$$t(t+2) \geq 24; \quad t^2+2t-24 \geq 0; \quad (t+6)(t-4) \geq 0.$$

$$(x^2+3x+6)(x^2+3x-4) \geq 0.$$

$$x^2+3x+6 > 0 \quad (\text{при всех } x),$$

$$\text{тогда } x^2+3x-4 \geq 0; \quad (x+4)(x-1) \geq 0$$



$$\text{Ответ: } (-\infty; -4] \cup [1; \infty).$$

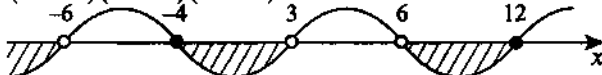
$$8. \frac{1}{x+6} + \frac{7}{x-3} \leq \frac{5}{x-6}.$$

$$\frac{(x-3)(x-6) + 7(x+6)(x-6) - 5(x+6)(x-3)}{(x+6)(x-3)(x-6)} \leq 0;$$

$$\frac{x^2 - 9x + 18 + 7x^2 - 252 - 5x^2 - 15x + 90}{(x+6)(x-3)(x-6)} \leq 0;$$

$$\frac{3x^2 - 24x - 144}{(x+6)(x-3)(x-6)} \leq 0; \quad \frac{3(x^2 - 8x - 48)}{(x+6)(x-3)(x-6)} \leq 0;$$

$$\frac{3(x-12)(x+4)}{(x+6)(x-3)(x-6)} \leq 0.$$



Ответ: $(-\infty; -6) \cup [-4; 3) \cup (6; 12]$.

$$9. \left(\frac{1-x}{3x^2-4x+1} - \frac{x+1}{2x^2-3x-5} \right) (6x^2-17x+5) \geq 0.$$

$$a) 3x^2 - 4x + 1 = (x-1)(3x-1);$$

$$б) 2x^2 - 3x - 5 = (x+1)(2x-5);$$

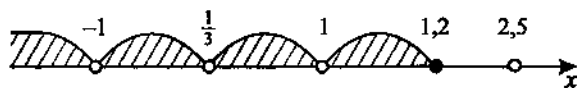
$$в) 6x^2 - 17x + 5 = (2x-5)(3x-1).$$

$$\left(\frac{1-x}{(x-1)(3x-1)} - \frac{x+1}{(x+1)(2x-5)} \right) (2x-5)(3x-1) \geq 0;$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{-1}{3x-1} - \frac{1}{2x-5} \right) (2x-5)(3x-1) \geq 0, \\ x \neq \pm 1; \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{(-2x+5-3x+1)(2x-5)(3x-1)}{(3x-1)(2x-5)} \geq 0, \\ x \neq \pm 1; \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 6-5x \geq 0, \\ x \neq \pm 1, \\ x \neq 2,5, \\ x \neq \frac{1}{3}. \end{array} \right.$$



Ответ: $(-\infty; -1) \cup \left(-1; \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}; 1\right) \cup (1; 1,2]$.

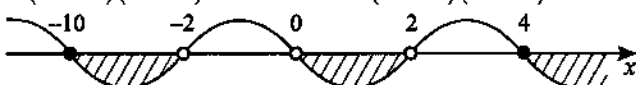
$$10. \frac{6}{x^2 - 2x} - \frac{12}{x^2 + 2x} \leq \frac{1}{x}.$$

$$\frac{6}{x(x-2)} - \frac{12}{x(x+2)} - \frac{1}{x} \leq 0;$$

$$\frac{6(x+2) - 12(x-2) - (x+2)(x-2)}{x(x+2)(x-2)} \leq 0;$$

$$\frac{6x + 12 - 12x + 24 - x^2 + 4}{x(x+2)(x-2)} \leq 0;$$

$$\frac{-x^2 - 6x + 40}{x(x+2)(x-2)} \leq 0; \quad \frac{-(x+10)(x-4)}{x(x+2)(x-2)} \leq 0.$$



Ответ: $[-10; -2) \cup (0; 2) \cup [4; \infty)$.

Решение проверочной работы 4

$$1. |2x^2 - 9x + 15| \geq 20.$$

$$\begin{cases} 2x^2 - 9x + 15 \geq 20 \\ 2x^2 - 9x + 15 \leq -20; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x^2 - 9x - 5 \geq 0 \\ 2x^2 - 9x + 35 \leq 0. \end{cases}$$

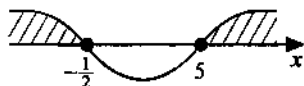
$$2x^2 - 9x - 5 = 0;$$

$$x_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{81 + 40}}{4} = \frac{9 \pm 11}{4},$$

$$\text{тогда } 2x^2 - 9x - 5 = (x - 5)(2x + 1).$$

$$2x^2 - 9x + 35 > 0 \quad (\text{при всех } x), \text{ так как } \begin{cases} a = 2 > 0, \\ D < 0. \end{cases}$$

$$(x - 5)(2x + 1) \geq 0.$$



$$\text{Ответ: } \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right] \cup [5; \infty).$$

$$2. \frac{x^2 - |x| - 12}{x - 3} \geq 2x.$$

$$\left[\begin{cases} x \geq 0, \\ \frac{x^2 - x - 12}{x - 3} \geq 2x \\ x < 0, \\ \frac{x^2 + x - 12}{x - 3} \geq 2x; \end{cases} \right. \quad \left[\begin{cases} x \geq 0, \\ \frac{2x^2 - 6x - x^2 + x + 12}{x - 3} \leq 0 \\ x < 0, \\ \frac{2x^2 - 6x - x^2 - x + 12}{x - 3} \leq 0; \end{cases} \right.$$

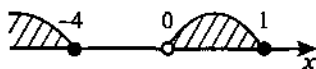
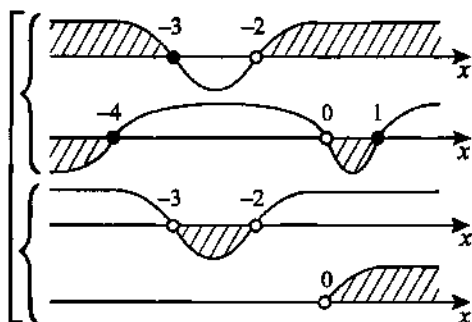
$$\left[\begin{cases} x \geq 0, \\ \frac{x^2 - 5x + 12}{x - 3} \leq 0 \\ x < 0, \\ \frac{x^2 - 7x + 12}{x - 3} \leq 0. \end{cases} \right.$$

$$\left[\begin{cases} (x+2)(x+3) \geq 0, \\ x \neq -2, \\ x+3 \leq \frac{4}{x} \end{cases} \right. \quad \left[\begin{cases} (x+2)(x+3) \geq 0, \\ x \neq -2, \\ \frac{x^2+3x-4}{x} \leq 0 \end{cases} \right.$$

$$\left[\begin{cases} (x+2)(x+3) < 0, \\ -(x+3) \leq \frac{4}{x}; \end{cases} \right. \quad \left[\begin{cases} (x+2)(x+3) < 0, \\ \frac{x^2+3x+4}{x} \geq 0; \end{cases} \right.$$

$$(x^2+3x+4 > 0 \text{ для всех } x).$$

$$\left[\begin{cases} (x+2)(x+3) \geq 0, \\ x \neq -2, \\ \frac{(x+4)(x-1)}{x} \leq 0 \end{cases} \right. \quad \left[\begin{cases} (x+2)(x+3) < 0, \\ \frac{1}{x} \geq 0. \end{cases} \right.$$



Ответ: $(-\infty; -4] \cup (0; 1]$.

5. $\frac{|x^2 - 4x| + 3}{x^2 + |x| + 5} \geq 1.$

Так как $x^2 + |x| + 5 > 0$ для всех x , то

$$|x^2 - 4x| + 3 \geq x^2 + |x| + 5;$$

$$|x^2 - 4x| \geq x^2 + |x| + 2;$$

$$\begin{cases} x^2 - 4x \geq x^2 + |x| + 5 \\ x^2 - 4x \leq -x^2 - |x| - 5; \end{cases} \quad \begin{cases} |x| \leq -4x - 5 \\ |x| \leq -2x^2 + 4x - 5; \end{cases}$$

$$\left[\begin{cases} x \leq -4x - 5, \\ x \geq 4x + 5 \\ x \leq -2x^2 + 4x - 5, \\ x \geq 2x^2 - 4x + 5; \end{cases} \right. \quad \left[\begin{cases} x \leq -1, \\ x \leq -\frac{5}{3} \\ 2x^2 - 3x + 5 \leq 0, \\ 2x^2 - 5x + 5 \leq 0; \end{cases} \right.$$

(так как $2x^2 - 3x + 5 > 0$ для всех x , то $x \leq -1$).

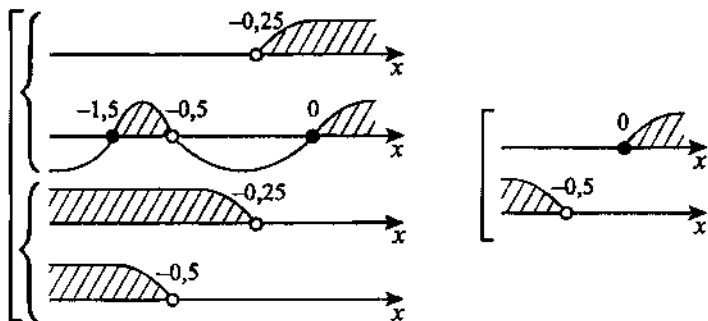
Ответ: $(-\infty; -1]$.

$$6. \frac{4x^2 + 5x + 1}{|4x + 1|} \geq \frac{1}{2x + 1}.$$

$$\left[\begin{cases} 4x + 1 > 0, \\ \frac{4x^2 + 5x + 1}{4x + 1} \geq \frac{1}{2x + 1} \\ 4x + 1 < 0, \\ -\frac{4x^2 + 5x + 1}{4x + 1} \geq \frac{1}{2x + 1}; \end{cases} \right. \quad \left[\begin{cases} x > -0,25, \\ x + 1 \geq \frac{1}{2x + 1} \\ x < -0,25, \\ -(x + 1) \geq \frac{1}{2x + 1}. \end{cases} \right.$$

так как $4x^2 + 5x + 1 = (x + 1)(4x + 1)$.

$$\left[\begin{cases} x > -0,25, \\ \frac{2x^2 + 3x}{2x + 1} \geq 0 \\ x < -0,25, \\ \frac{2x^2 + 3x + 2}{2x + 1} \leq 0; \end{cases} \right. \quad (2x^2 + 3x + 2 > 0 \text{ для всех } x).$$



Ответ: $(-\infty; -0,5) \cup [0; \infty)$.

$$7. \frac{|4x^2 - 5x + 1|}{4x - 1} \leq \frac{1}{2|x| - 1}.$$

Так как $4x^2 - 5x + 1 = (x - 1)(4x - 1)$,

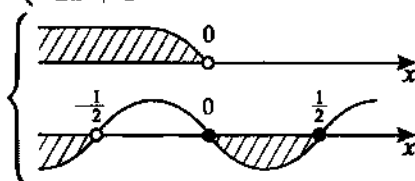


$$\frac{|(4x - 1)(x - 1)|}{4x - 1} \leq \frac{1}{2|x| - 1}, \quad \begin{array}{c} \text{0} \quad \text{1/4} \quad \text{1} \\ \text{a} \quad \text{б} \quad \text{в} \quad \text{г} \quad \text{д} \end{array}$$

$$a) \begin{cases} x < 0, \\ \frac{4x^2 - 5x + 1}{4x - 1} \leq \frac{1}{-2x - 1}; \end{cases} \quad \left((-\infty; 0) \subset \left(-\infty; \frac{1}{4} \right] \right);$$

$$\begin{cases} x < 0, \\ x - 1 \leq \frac{1}{-2x - 1}; \end{cases} \quad \begin{cases} x < 0, \\ x - 1 + \frac{1}{2x + 1} \leq 0; \end{cases}$$

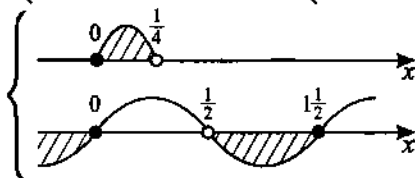
$$\begin{cases} x < 0, \\ \frac{2x^2 - x}{2x + 1} \leq 0; \end{cases}$$



$$x < -\frac{1}{2}.$$

$$6) \begin{cases} 0 \leq x < \frac{1}{4}, \\ \frac{4x^2 - 5x + 1}{4x - 1} \leq \frac{1}{2x - 1}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 \leq x < \frac{1}{4}, \\ x - 1 \leq \frac{1}{2x - 1}; \end{cases} \quad \begin{cases} 0 \leq x < \frac{1}{4}, \\ \frac{2x^2 - 3x}{2x - 1} \leq 0; \end{cases}$$

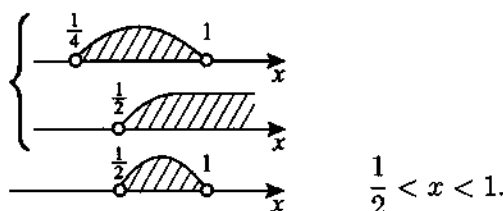


$$x = 0.$$

$$в) \begin{cases} \frac{1}{4} < x < 1, \\ \frac{-(4x-1)(x-1)}{4x-1} \leq \frac{1}{2x-1}; \end{cases} \begin{cases} \frac{1}{4} < x < 1, \\ -(x-1) \leq \frac{1}{2x-1}; \end{cases}$$

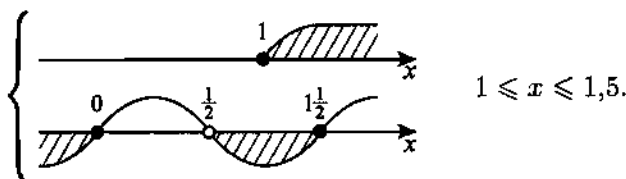
$$\begin{cases} \frac{1}{4} < x < 1, \\ x-1 + \frac{1}{2x-1} \geq 0; \end{cases} \begin{cases} \frac{1}{4} < x < 1, \\ \frac{2x^2-3x+2}{2x-1} \geq 0; \end{cases}$$

$$(2x^2 - 3x + 2 > 0 \text{ при всех } x) \begin{cases} \frac{1}{4} < x < 1, \\ \frac{1}{2x-1} \geq 0. \end{cases}$$



$$г) \begin{cases} x \geq 1, \\ \frac{4x^2-5x+1}{4x-1} \leq \frac{1}{2x-1}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 1, \\ x-1 \leq \frac{1}{2x-1}; \end{cases} \begin{cases} x \geq 1, \\ \frac{2x^2-3x}{2x-1} \leq 0; \end{cases}$$



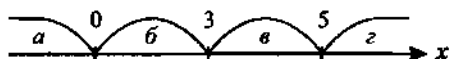
Ответ: $(-\infty; -0,5) \cup \{0\} \cup (0,5; 1,5]$.

$$8. \frac{|x^2 - 5x| + 6}{|x - 3|x} \geq 1,5.$$

Знаки для $y = x^2 - 5x$

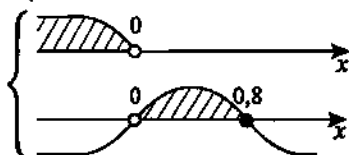


Корни модулей



$$a) \begin{cases} x < 0, \left(\begin{array}{l} |x^2 - 5x| = x^2 - 5x \\ |x - 3| = 3 - x \end{array} \right) \\ \frac{x^2 - 5x + 6}{-(x - 3)x} \geq 1,5; \end{cases} \quad \begin{cases} x < 0, \\ \frac{x - 2}{-x} \geq 1,5; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 0, \\ \frac{2x - 4 + 3x}{-x} \geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x < 0, \\ \frac{5x - 4}{-x} \geq 0; \end{cases}$$



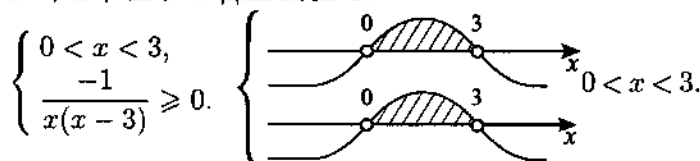
нет решений.

$$b) \begin{cases} 0 < x < 3, \left(\begin{array}{l} |x^2 - 5x| = 5x - x^2 \\ |x - 3| = 3 - x \end{array} \right) \\ \frac{-x^2 + 5x + 6}{-x(x - 3)} \geq 1,5; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 < x < 3, \\ \frac{x^2 - 5x - 6}{x(x - 3)} \geq 1,5; \end{cases} \quad \begin{cases} 0 < x < 3, \\ \frac{2x^2 - 10x - 12 - 3x^2 + 9x}{x(x - 3)} \geq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 < x < 3, \\ \frac{-x^2 - x - 12}{x(x - 3)} \geq 0. \end{cases}$$

$x^2 + x + 12 > 0$ для всех x .

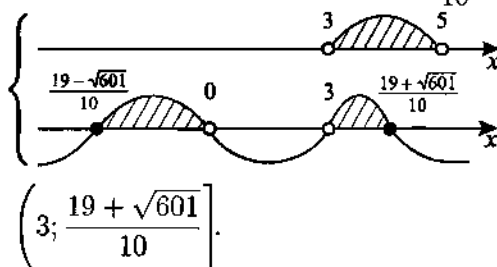


$$в) \begin{cases} 3 < x < 5, \left(\begin{array}{l} |x^2 - 5x| = 5x - x^2 \\ |x - 3| = x - 3 \end{array} \right) \\ \frac{-x^2 + 5x + 6}{x(x-3)} \geq 1,5; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3 < x < 5, \\ \frac{-2x^2 + 10x + 12 - 3x^2 + 9x}{x(x-3)} \geq 0; \end{cases}$$

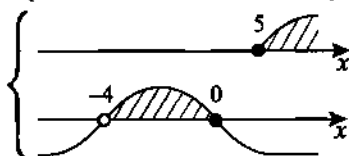
$$\begin{cases} 3 < x < 5, \\ \frac{-5x^2 + 19x + 12}{x(x-3)} \geq 0; \end{cases}$$

$$5x^2 - 19x - 12 = 0; \quad x_{1,2} = \frac{19 \pm \sqrt{601}}{10}.$$



$$г) \begin{cases} x \geq 5, \left(\begin{array}{l} |x^2 - 5x| = x^2 - 5x \\ |x - 3| = x - 3 \end{array} \right) \\ \frac{x^2 - 5x + 6}{x(x-3)} \geq 1,5; \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 5, \\ \frac{x-2}{x} \geq 1,5; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 5, \\ \frac{2x - 4 - 3x}{x} \geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 5, \\ \frac{-x - 4}{x} \geq 0. \end{cases}$$



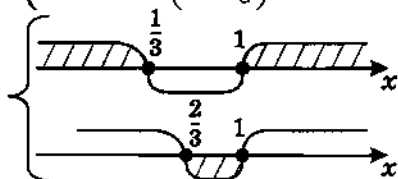
нет решений.

$$\text{Ответ: } (0; 3) \cup \left[3; \frac{19 + \sqrt{601}}{10} \right].$$

Решение проверочной работы 5

$$1. \begin{cases} 3x^2 - 4x + 1 \geq 0, \\ 3x^2 - 5x + 2 \leq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3(x-1)\left(x-\frac{1}{3}\right) \geq 0, \\ 3(x-1)\left(x-\frac{2}{3}\right) \leq 0. \end{cases}$$

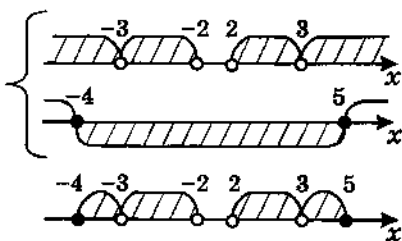


Ответ: $x = 1$.

$$2. \begin{cases} (x^2 - 6|x| + 9)(|x| - 2) > 0, \\ x^2 - x - 20 \leq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (|x| - 3)^2(|x| - 2) > 0, \\ (x - 5)(x + 4) \leq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} |x| \neq 3, \\ \begin{cases} x > 2 \\ x < -2, \end{cases} \\ (x - 5)(x + 4) \leq 0. \end{cases}$$

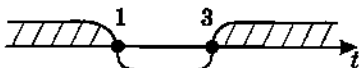


Ответ: $[-4; -3) \cup (-3; -2) \cup (2; 3) \cup (3; 5]$.

$$3. \begin{cases} x^2 - 7x - 18 \leq 0, \\ (x - 2)^2 - 4|x - 2| + 3 \geq 0. \end{cases}$$

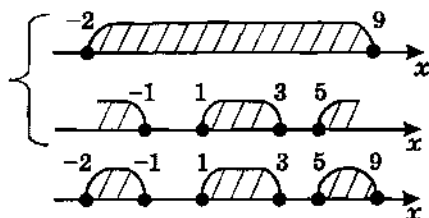
$$x^2 - 7x - 18 = 0, \quad \begin{cases} x = 9 \\ x = -2. \end{cases} \quad \begin{cases} (x - 9)(x + 2) \leq 0, \\ (x - 2)^2 - 4|x - 2| + 3 \geq 0. \end{cases}$$

Пусть $|x - 2| = t$. Тогда $t^2 - 4t + 3 = 0$, $\begin{cases} t = 3 \\ t = 1. \end{cases}$



$$\begin{cases} (x-9)(x+2) \leq 0, \\ (|x-2|-3)(|x-2|-1) \geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} (x-9)(x+2) \leq 0, \\ \begin{cases} |x-2| \geq 3 \\ |x-2| \leq 1; \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-9)(x+2) \leq 0, \\ \begin{cases} x-2 \geq 3 \\ x-2 \leq -3, \\ \begin{cases} x-2 \leq 1, \\ x-2 \geq -1; \end{cases} \end{cases} \end{cases} \quad \begin{cases} -2 \leq x \leq 9, \\ \begin{cases} x \geq 5 \\ x \leq -1, \\ \begin{cases} x \leq 3, \\ x \geq 1. \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$



Ответ: $[-2; -1] \cup [1; 3] \cup [5; 9]$.

$$4. \quad \begin{cases} 10 \leq x^2 - 8x + 25 < 18, \\ 7 + 6|2x - 3| - (2x - 3)^2 \leq 0; \end{cases} \quad *$$

$$\begin{cases} x^2 - 8x + 7 < 0, \\ x^2 - 8x + 15 \geq 0, \\ 7 + 6|2x - 3| - (2x - 3)^2 \leq 0. \end{cases}$$

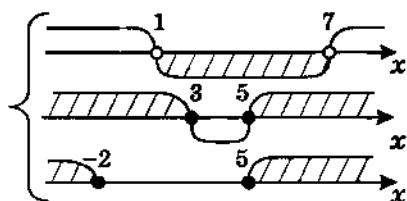
Пусть $|2x - 3| = t \quad (t \geq 0)$.

$$t^2 + 6t + 7 \leq 0, \quad -(t-7)(t+1) \leq 0.$$

$$\begin{cases} (x-1)(x-7) < 0, \\ (x-3)(x-5) \geq 0, \\ -(t-7)(t+1) \leq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-1)(x-7) < 0, \\ (x-3)(x-5) \geq 0, \\ -(|2x-3|-7)(|2x-3|+1) \leq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} (x-1)(x-7) < 0, \\ (x-3)(x-5) \geq 0, \\ |2x-3| \geq 7; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-1)(x-7) < 0, \\ (x-3)(x-5) \geq 0, \\ \begin{cases} 2x-3 \geq 7 \\ 2x-3 \leq -7; \end{cases} \end{cases} \quad \begin{cases} (x-1)(x-7) < 0, \\ (x-3)(x-5) \geq 0, \\ \begin{cases} x \geq 5 \\ x \leq -2. \end{cases} \end{cases}$$

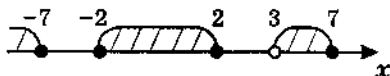
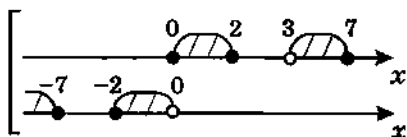
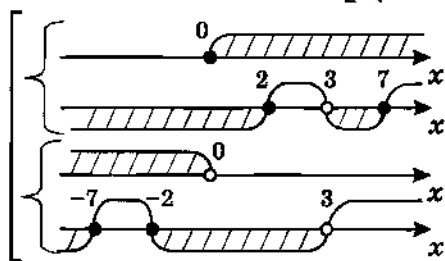


Ответ: $[5; 7)$.

$$5. \begin{cases} \frac{x^2 - 9|x| + 14}{x - 3} \leq 0, \\ |x - 4|(|x + 3| - 8) < 0. \end{cases}$$

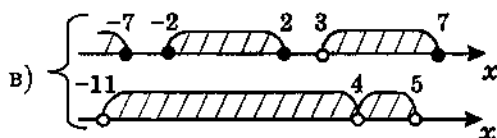
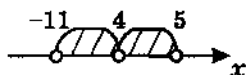
$$a) \frac{x^2 - 9|x| + 14}{x - 3} \leq 0; \quad |x|^2 - 9|x| + 14 = 0; \quad \begin{cases} |x| = 7 \\ |x| = 2. \end{cases}$$

$$\frac{(|x| - 7)(|x| - 2)}{x - 3} \leq 0; \quad \begin{cases} x \geq 0, \\ \frac{(x - 7)(x - 2)}{x - 3} \leq 0 \\ x < 0, \\ \frac{(x + 7)(x + 2)}{x - 3} \leq 0. \end{cases}$$



$$6) |x-4|(|x+3|-8) < 0; \quad \begin{cases} |x-4| \neq 0, \\ |x+3| < 8; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \neq 4, \\ x+3 < 8, \\ x+3 > -8; \end{cases} \quad \begin{cases} x \neq 4, \\ x < 5, \\ x > -11. \end{cases}$$



Ответ: $(-11; -7] \cup [-2; 2] \cup (3; 4) \cup (4; 5)$.

$$6. \quad \begin{cases} \frac{2x^2+3}{x^2-x} + \left| \frac{4x^2+6}{x^2-x} \right| < 6, \\ |x-1-x^2| < |-x-x^2+15|. \end{cases}$$

а) Пусть $\frac{2x^2+3}{x^2-x} = t$; $t+2|t| < 6$;

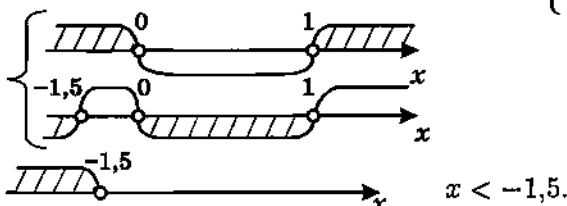
$$\begin{cases} t \geq 0, \\ t < 2 \\ t \leq 0, \\ -t < 6. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{2x^2+3}{x^2-x} \geq 0, \\ \frac{2x^2+3}{x^2-x} < 2 \\ \frac{2x^2+3}{x^2-x} \leq 0, \\ \frac{2x^2+3}{x^2-x} > -6; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(x-1) > 0, \\ \frac{2x^2+3-2x^2+2x}{x(x-1)} < 0 \\ x(x-1) < 0, \\ \frac{2x^2+3+6x^2-6x}{x(x-1)} > 0; \end{cases}$$

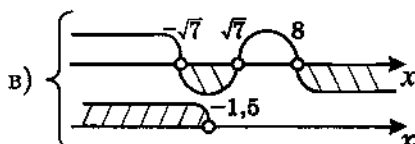
$$\begin{cases} x(x-1) > 0, \\ \frac{2x+3}{x(x-1)} < 0 \\ x(x-1) < 0, \\ \frac{8x^2-6x+3}{x(x-1)} > 0. \end{cases}$$

так как $8x^2 - 6x + 3 > 0$ (при всех x), $\begin{cases} a = 8 > 0, \\ D < 0. \end{cases}$



$$\begin{aligned} \text{б) } & |x - 1 - x^2| < |-x - x^2 + 15|; \\ & |\alpha| < |\beta| \Leftrightarrow \alpha^2 < \beta^2, \text{ и } |-\alpha| = |\alpha| \\ & (x - 1 - x^2)^2 < (-x - x^2 + 15)^2; \\ & (x^2 - x + 1 - x^2 - x + 15)(x^2 - x + 1 + x^2 + x - 15) < 0; \\ & (16 - 2x)(2x^2 - 14) < 0; \end{aligned}$$

$$4(8 - x)(x^2 - 7) < 0.$$



Ответ: $(-\sqrt{7}; -1, 5)$.

$$7. \begin{cases} (x^2 - 3x + 2)(x^2 - 9x + 20) < 180, \\ \frac{4}{|x + 1| - 2} \geq |x - 1|. \end{cases}$$

$$\text{а) } (x^2 - 3x + 2)(x^2 - 9x + 20) < 180;$$

$$(x - 1)(x - 2)(x - 4)(x - 5) < 180,$$

перемножим первый множитель на четвертый и второй на третий:

$$(x^2 - 6x + 5)(x^2 - 6x + 8) < 180.$$

$$\text{Пусть } x^2 - 6x + 5 = t; \quad t(t + 3) < 180;$$

$$t^2 + 3t - 180 < 0; \quad (t + 15)(t - 12) < 0;$$

$$(x^2 - 6x + 5 + 15)(x^2 - 6x + 5 - 12) < 0;$$

$$(x^2 - 6x + 20)(x^2 - 6x - 7) < 0 \Leftrightarrow (x - 7)(x + 1) < 0;$$

$$x \in (-1; 7).$$

Учитывая, что $x^2 - 6x + 20 > 0$ при всех x , так как

$$\begin{cases} a = 1 > 0, \\ D < 0. \end{cases}$$

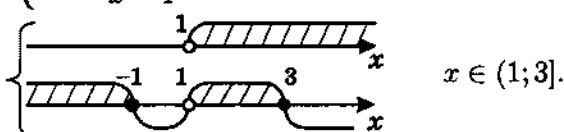
$$б) \frac{4}{|x+1|-2} \geq |x-1|,$$

$$\text{тогда } |x+1|-2 > 0; \quad \begin{cases} x+1 > 2 \\ x+1 < -2; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 1 \\ x < -3. \end{cases}$$

$$в) \begin{cases} x > 1, \\ \frac{4}{|x+1|-2} \geq |x-1|; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 1, \\ \frac{4}{x+1-2} \geq x-1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 1, \\ \frac{4 - (x-1)^2}{x-1} \geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 1, \\ \frac{(2+x-1)(2-x+1)}{x-1} \geq 0; \end{cases}$$

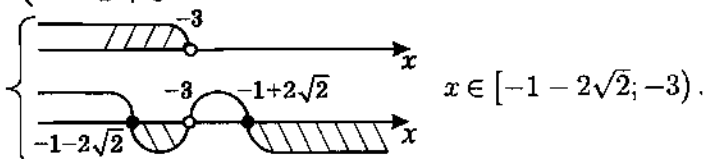
$$\begin{cases} x > 1, \\ \frac{(x+1)(3-x)}{x-1} \geq 0. \end{cases}$$



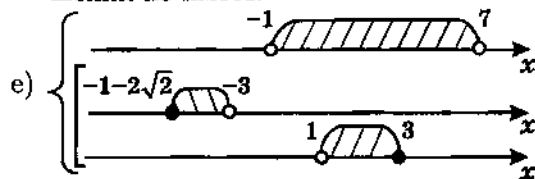
$$г) \begin{cases} x < -3, \\ \frac{4}{|x+1|-2} \geq |x-1|; \end{cases} \quad \begin{cases} x < -3, \\ \frac{4}{-x-1-2} \geq 1-x; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < -3, \\ \frac{4}{x+3} + 1 - x \leq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x < -3, \\ \frac{4 + (1-x)(x+3)}{x+3} \leq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < -3, \\ \frac{-x^2 - 2x + 7}{x+3} \leq 0. \end{cases}$$



- д) При $|x+1| - 2 < 0$ второе неравенство системы решений не имеет.



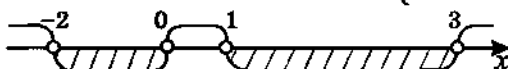
Ответ: $(1; 3]$.

$$8. \begin{cases} x^2 - x < \frac{36}{x^2 - x}, \\ \left(\frac{12x - 15}{2x^2 + x} - 1 \right) (x - |2x - 3|) (3 - x) \leq 0. \end{cases}$$

а) $x^2 - x < \frac{36}{x^2 - x}; \quad \frac{(x^2 - x)^2 - 36}{x^2 - x} < 0;$

$$\frac{(x^2 - x - 6)(x^2 - x + 6)}{x^2 - x} < 0;$$

$x^2 - x + 6 > 0$ (при всех x), т.к. $\begin{cases} a=1, & \frac{(x-3)(x+2)}{x(x-1)} < 0. \\ D < 0. \end{cases}$



б) $\left(\frac{12x - 15}{2x^2 + x} - 1 \right) (x - |2x - 3|) (3 - x) \leq 0;$

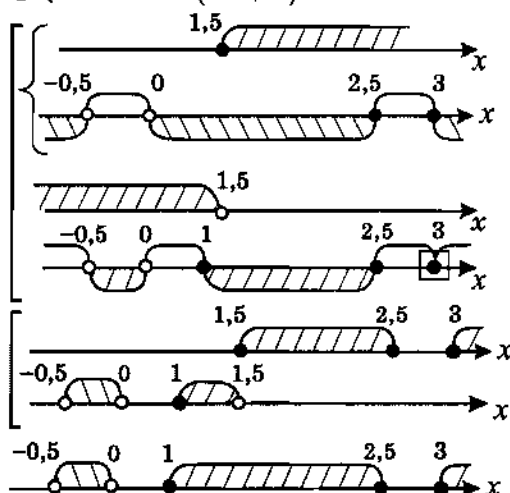
$$\begin{cases} 2x - 3 \geq 0, \\ \frac{12x - 15 - 2x^2 - x}{x(2x + 1)} (x - 2x + 3) (3 - x) \leq 0 \\ 2x - 3 < 0, \\ \frac{12x - 15 - 2x^2 - x}{x(2x + 1)} (-3 + 3x) (3 - x) \leq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 1, 5, \\ \frac{(-2x^2 + 11x - 15)(3 - x)^2}{x(2x + 1)} \leq 0 \\ x < 1, 5, \\ \frac{(-2x^2 + 11x - 15)3(x - 1)(3 - x)}{x(2x + 1)} \leq 0. \end{cases}$$

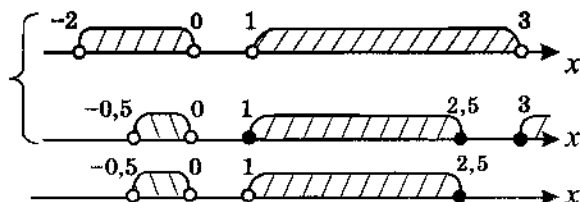
$$2x^2 - 11x + 15 = 0;$$

$$x_{1,2} = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 120}}{4} = \frac{11 \pm 1}{4}; \quad \begin{cases} x = 3 \\ x = \frac{5}{2}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{cases} x \geq 1,5, \\ \frac{-2(x-3)^3(x-2,5)}{x(2x+1)} \leq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 1,5, \\ \frac{6(x-3)^2(x-1)(x-2,5)}{x(2x+1)} \leq 0. \end{cases} \end{cases}$$



в) Учтя результаты решения пункта а), получим



Ответ: $(-0,5; 0) \cup (1; 2,5]$.

Решение тренировочных карточек

Решение тренировочной карточки 1

$$1. \frac{1}{x+1} - \frac{2}{x^2-x+1} \leq \frac{1-2x}{1+x^3}.$$

$$\frac{x^2-x+1-2(x+1)-1+2x}{(x+1)(x^2-x+1)} \leq 0; \frac{x^2-x-2}{(x+1)(x^2-x+1)} \leq 0;$$

$$x^2-x+1 > 0 \text{ (при всех } x) \quad \begin{cases} a=1 > 0, \\ D < 0. \end{cases}$$

$$\frac{(x-2)(x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)} \leq 0; \frac{(x-2)(x+1)}{x+1} \leq 0.$$



Ответ: $(-\infty; -1) \cup (-1; 2]$.

$$2. \frac{x^2}{x^2-7x+10} + \frac{16}{3x^2-12} \leq 1.$$

$$\frac{x^2}{(x-2)(x-5)} + \frac{16}{3(x-2)(x+2)} - 1 \leq 0;$$

$$\frac{3x^2(x+2) + 16(x-5) - 3(x-2)(x+2)(x-5)}{3(x-2)(x-5)(x+2)} \leq 0;$$

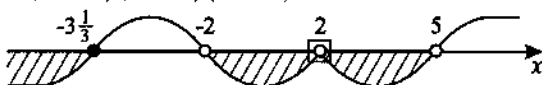
$$\frac{3x^3 + 6x^2 + 16x - 80 - 3x^3 + 15x^2 + 12x - 60}{3(x-2)(x-5)(x+2)} \leq 0;$$

$$\frac{7(3x^2 + 4x - 20)}{3(x-2)(x-5)(x+2)} \leq 0.$$

$$3x^2 + 4x - 20 = (3x+10)(x-2);$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+60}}{3} = \frac{-2 \pm 8}{3}; \quad \begin{cases} x=2 \\ x=-\frac{10}{3} \end{cases}$$

$$\frac{(3x+10)(x-2)}{3(x-2)(x-5)(x+2)} \leq 0.$$

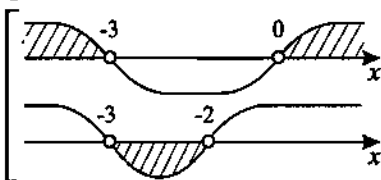


Ответ: $\left(-\infty; -3\frac{1}{3}\right] \cup (-2; 2) \cup (2; 5).$

$$3. |x^2 + 4x + 3| > x + 3.$$

$$\begin{cases} x^2 + 4x + 3 > x + 3 \\ x^2 + 4x + 3 < -x - 3; \end{cases} \quad \begin{cases} x(x+3) > 0 \\ x^2 + 5x + 6 < 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(x+3) > 0 \\ (x+3)(x+2) < 0. \end{cases}$$



$$(-\infty; -3) \cup (-3; -2) \cup (0; +\infty).$$

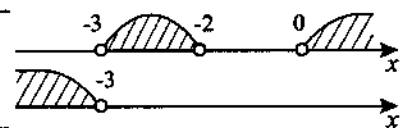
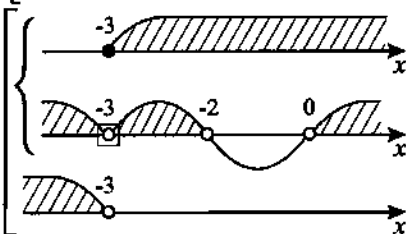
Другой способ:

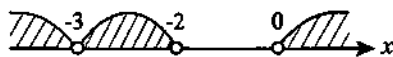
$$|x^2 + 4x + 3| > x + 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3 \geq 0, \\ |x^2 + 4x + 3|^2 > (x + 3)^2 \\ x + 3 < 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -3, \\ (x^2 + 4x + 3 + x + 3)(x^2 + 4x + 3 - x - 3) > 0 \\ x < -3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -3, \\ (x^2 + 5x + 6)(x^2 + 3x) > 0 \\ x < -3. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -3, \\ (x+2)(x+3)x(x+3) > 0 \\ x < -3. \end{cases}$$





Ответ: $(-\infty; -3) \cup (-3; -2) \cup (0; +\infty)$.

$$4. \frac{(1+x)(2+x)}{x^2 - |x| - 2} \geq -3x.$$

$$\left[\begin{cases} x \geq 0, \\ \frac{(1+x)(2+x)}{x^2 - x - 2} \geq -3x \\ x < 0, \\ \frac{(1+x)(2+x)}{x^2 + x - 2} \geq -3x; \end{cases} \right. \quad \left[\begin{cases} x \geq 0, \\ \frac{x+2}{x-2} \geq -3x, \\ x \neq -1 \\ x < 0, \\ \frac{1+x}{x-1} \geq -3x, \\ x \neq -2; \end{cases} \right.$$

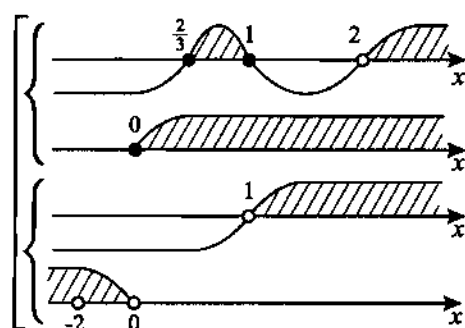
$$\left[\begin{cases} x \geq 0, \\ \frac{x+2+3x^2-6x}{x-2} \geq 0 \\ \frac{1+x+3x^2-3x}{x-1} \geq 0, \\ x < 0, \\ x \neq -2; \end{cases} \right. \quad \left[\begin{cases} x \geq 0, \\ \frac{3x^2-5x+2}{x-2} \geq 0 \\ \frac{3x^2-2x+1}{x-1} \geq 0, \\ x < 0, \\ x \neq -2. \end{cases} \right.$$

$$3x^2 - 5x + 2 = (3x - 2)(x - 1);$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{6}; \quad \left[\begin{matrix} x = 1 \\ x = \frac{2}{3} \end{matrix} \right.$$

$$3x^2 - 2x + 1 > 0 \text{ при всех } x, \text{ т.к. } \begin{cases} a = 3 > 0 \\ D < 0. \end{cases}$$

$$\left[\begin{cases} \frac{(3x-2)(x-1)}{x-2} \geq 0, \\ x \geq 0 \\ \frac{1}{x-1} \geq 0, \\ x < 0, \\ x \neq -2. \end{cases} \right.$$



нет решений.

Ответ: $\left[\frac{2}{3}; 1\right] \cup (2; +\infty)$.

$$5. \quad ||x-1|-5| \leq 2. \quad \begin{cases} |x-1|-5 \leq 2, \\ |x-1|-5 \geq -2; \end{cases} \quad \begin{cases} |x-1| \leq 7, \\ |x-1| \geq 3; \end{cases}$$

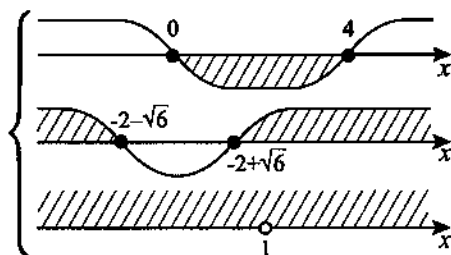
$$\begin{cases} \begin{cases} x-1 \leq 7, \\ x-1 \geq -7, \\ x-1 \geq 3, \\ x-1 \leq -3; \end{cases} & \begin{cases} \begin{cases} x \leq 8, \\ x \geq -6, \\ x \geq 4, \\ x \leq -2. \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

Ответ: $[-6; -2] \cup [4; 8]$.

$$6. \quad \frac{4x-1}{|x-1|} \geq |x+1|.$$

$$\begin{cases} 4x-1 \geq |x^2-1|, \\ x \neq 1; \end{cases} \quad (\text{так как } |a| \cdot |b| = |a \cdot b|)$$

$$\begin{cases} x^2-1 \leq 4x-1, \\ x^2-1 \geq 1-4x, \\ x \neq 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2-4x \leq 0, \\ x^2+4x-2 \geq 0, \\ x \neq 1. \end{cases}$$



$[-2+\sqrt{6}; 1) \cup (1; 4]$.

Другой способ:

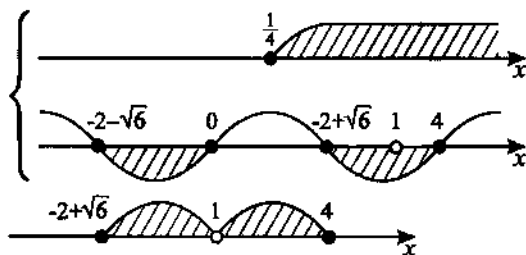
$$\frac{4x-1}{|x-1|} \geq |x+1| \Leftrightarrow \begin{cases} |x^2-1| \leq 4x-1, \\ x \neq 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x-1 \geq 0, \\ (|x^2-1|)^2 \leq (4x-1)^2, \\ x \neq 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq \frac{1}{4}, \\ (x^2-1-4x+1)(x^2-1+4x-1) \leq 0, \\ x \neq 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq \frac{1}{4}, \\ (x^2-4x)(x^2+4x-2) \leq 0, \\ x \neq 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq \frac{1}{4}, \\ x(x-4)(x^2+4x-2) \leq 0, \\ x \neq 1. \end{cases}$$



Выясним, что больше $-2 + \sqrt{6}$ или $\frac{1}{4}$?

$$\text{Пусть } -2 + \sqrt{6} > \frac{1}{4} \Leftrightarrow \sqrt{6} > 2\frac{1}{4} \Leftrightarrow 6 > \frac{81}{16} = 5\frac{1}{16}.$$

Ответ: $[-2 + \sqrt{6}; 1) \cup (1; 4]$.

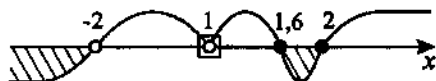
Решение тренировочной карточки 2

$$1. \left(\frac{x-2}{x-1} \right)^2 \leq \frac{x^2-6x+8}{x^2+x-2}.$$

$$\left(\frac{x-2}{x-1} \right)^2 - \frac{x^2-6x+8}{x^2+x-2} \leq 0; \quad \frac{x-2}{x-1} \left(\frac{x-2}{x-1} - \frac{x-4}{x+2} \right) \leq 0;$$

$$\frac{x-2}{x-1} \cdot \frac{x^2-4-(x-4)(x-1)}{(x+2)(x-1)} \leq 0; \quad \frac{x-2}{x-1} \cdot \frac{5x-8}{(x+2)(x-1)} \leq 0.$$

$$\frac{(x-2)(5x-8)}{(x+2)(x-1)^2} \leq 0$$



Ответ: $(-\infty; -2) \cup [1, 6; 2]$.

$$2. \frac{1}{x^2-4} + \frac{4}{2x^2+7x+6} \leq \frac{1}{2x+3} + \frac{4}{2x^3+3x^2-8x-12}.$$

$$2x^2+7x+6 = (2x+3)(x+2).$$

$$2x^3+3x^2-8x-12 = x^2(2x+3) - 4(2x+3) = (2x+3)(x-2)(x+2).$$

$$\frac{4}{(2x+3)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x-2)} - \frac{1}{(2x+3)} -$$

$$- \frac{4}{(2x+3)(x+2)(x-2)} \leq 0;$$

$$\frac{4(x-2) + 2x+3 - x^2 + 4 - 4}{(2x+3)(x+2)(x-2)} \leq 0;$$

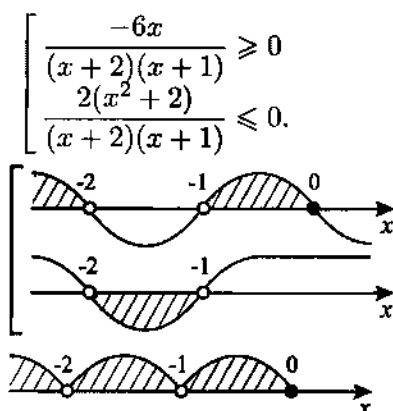
$$\frac{-x^2+6x-5}{(2x+3)(x+2)(x-2)} \leq 0; \quad \frac{-(x-1)(x-5)}{(2x+3)(x+2)(x-2)} \leq 0.$$



Ответ: $(-2; -1,5) \cup [1; 2) \cup [5; +\infty)$.

$$3. \left| \frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2} \right| \geq 1.$$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2} \geq 1 \\ \frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2} \leq -1; \end{array} \right. \quad \left[\begin{array}{l} \frac{x^2-3x+2-x^2-3x-2}{x^2+3x+2} \geq 0 \\ \frac{x^2-3x+2+x^2+3x+2}{x^2+3x+2} \leq 0; \end{array} \right.$$



Ответ: $(-\infty; -2) \cup (-2; -1) \cup (-1; 0]$.

4. $||x+5|-2| < x+1$.

$$\begin{cases} |x+5|-2 < x+1, \\ |x+5|-2 > -x-1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} |x+5| < x+3, \\ |x+5| > 1-x; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{cases} x+5 < x+3, \\ x+5 > -x-3, \end{cases} & \begin{cases} 5 < 3, \\ x > -4, \end{cases} \\ \begin{cases} x+5 > 1-x \\ x+5 < x-1; \end{cases} & \begin{cases} x > -2 \\ 5 < -1; \end{cases} \end{cases} \quad \text{нет решений.}$$

Другой способ:

$$||x+5|-2| < x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \geq 0, \\ (|x+5|-2)^2 < (x+1)^2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -1, \\ (|x+5|-2-x-1)(|x+5|-2+x+1) < 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -1, \\ (|x+5|-x-3)(|x+5|+x-1) < 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -1, & (|x+5| = x+5) \\ (x+5-x-3)(x+5+x-1) < 0; \end{cases}$$

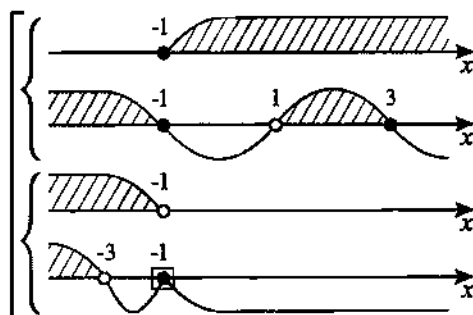
$$\begin{cases} x \geq -1, \\ 2 \cdot 2(x+2) < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq -1, \\ x < -2; \end{cases} \quad \text{нет решений.}$$

Ответ: нет решений.

$$5. \frac{4}{|x+1|-2} \geq x-1.$$

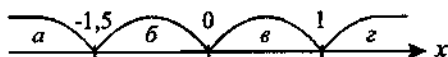
$$\left\{ \begin{array}{l} x+1 \geq 0, \\ \frac{4}{x+1-2} \geq x-1 \\ x+1 < 0, \\ \frac{4}{-x-1-2} \geq x-1; \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x \geq -1, \\ \frac{4-(x-1)^2}{x-1} \geq 0 \\ x < -1, \\ -\frac{4+(x-1)(x+3)}{x+3} \geq 0; \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x \geq -1, \\ \frac{(2+x-1)(2-x+1)}{x-1} \geq 0 \\ x < -1, \\ \frac{-x^2-2x-1}{x+3} \geq 0; \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x \geq -1, \\ \frac{(x+1)(3-x)}{x-1} \geq 0 \\ x < -1, \\ \frac{-(x+1)^2}{x+3} \geq 0. \end{array} \right.$$



Ответ: $(-\infty; -3) \cup \{-1\} \cup (1; 3]$.

$$6. |x-1| - |x| + |2x+3| > 2x+4.$$



$$a) \left\{ \begin{array}{l} x < -1,5, \quad \left(\begin{array}{l} 2x+3 < 0 \quad |2x+3| = -2x-3 \\ x < 0 \quad |x| = -x \\ x-1 < 0 \quad |x-1| = 1-x \end{array} \right) \\ 1-x+x-2x-3 > 2x+4; \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} x < -1,5, \\ x < -1,5; \end{array} \right. \quad (-\infty; -1,5):$$

$$\begin{aligned}
 \text{б) } & \left\{ \begin{array}{l} x < 0, \\ x \geq -1,5, \left(\begin{array}{ll} x < 0 & |x| = -x \\ 2x + 3 \geq 0 & |2x + 3| = 2x + 3 \\ x - 1 < 0 & |x - 1| = 1 - x \end{array} \right) \\ 1 - x + x + 2x + 3 > 2x + 4; \end{array} \right. \\
 & \left\{ \begin{array}{l} x < 0, \\ x \geq -1,5, \text{ нет решений;} \\ 4 > 4; \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{в) } & \left\{ \begin{array}{l} x < 1, \left(\begin{array}{ll} x - 1 < 0 & |x - 1| = 1 - x \\ x \geq 0 & |x| = x \\ 2x + 3 > 0 & |2x + 3| = 2x + 3 \end{array} \right) \\ 1 - x - x + 2x + 3 > 2x + 4; \end{array} \right. \\
 & \left\{ \begin{array}{l} x < 1, \\ x \geq 0, \text{ нет решений;} \\ x < 0; \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{г) } & \left\{ \begin{array}{l} x \geq 1, \left(\begin{array}{ll} x - 1 \geq 0 & |x - 1| = x - 1 \\ x > 0 & |x| = x \\ 2x + 3 > 0 & |2x + 3| = 2x + 3 \end{array} \right) \\ x - 1 - x + 2x + 3 > 2x + 4; \end{array} \right. \\
 & \left\{ \begin{array}{l} x \geq 1, \\ 2 > 4; \end{array} \right. \text{ нет решений.}
 \end{aligned}$$

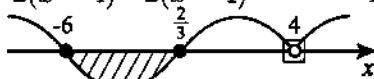
Ответ: $(-\infty; -1,5)$.

Решение тренировочной карточки 3

$$1. \left(\frac{x+1}{4-x} \right)^2 \leq \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{x+1}{4-x} - \frac{1}{2} \right) \left(\frac{x+1}{4-x} + \frac{1}{2} \right) \leq 0;$$

$$\frac{2x+2-4+x}{2(4-x)} \cdot \frac{2x+2+4-x}{2(4-x)} \leq 0;$$

$$\frac{3x-2}{2(x-4)} \cdot \frac{x+6}{2(x-4)} \leq 0; \quad \frac{(3x-2)(x+6)}{4(x-4)^2} \leq 0.$$



Ответ: $\left[-6; \frac{2}{3}\right]$.

$$2. \frac{10(5-x)}{3(x-4)} - \frac{11}{3} \cdot \frac{6-x}{x-4} \geq \frac{5(6-x)}{x-2}.$$

$$\frac{1}{3(x-4)} (10(5-x) - 11(6-x)) \geq \frac{5(6-x)}{x-2};$$

$$\frac{50-10x-66+11x}{3(x-4)} - \frac{5(6-x)}{x-2} \geq 0;$$

$$\frac{(x-16)(x-2) - 3(x-4)(30-5x)}{3(x-4)(x-2)} \geq 0;$$

$$\frac{x^2 - 18x + 32 + 15x^2 - 150x + 360}{3(x-4)(x-2)} \geq 0;$$

$$\frac{8(2x^2 - 21x + 49)}{3(x-4)(x-2)} \geq 0. \quad 2x^2 - 21x + 49 = (2x-7)(x-7).$$

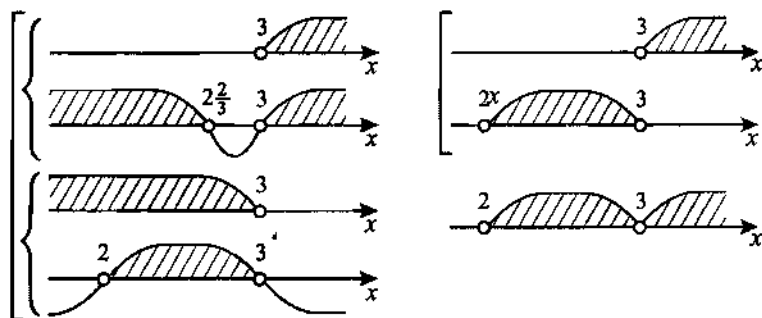
$$\frac{(2x-7)(x-7)}{(x-4)(x-2)} \geq 0.$$



Ответ: $(-\infty; 2) \cup [3.5; 4) \cup [7; +\infty)$.

$$3. \frac{2x-5}{|x-3|} > -1.$$

$$\left[\begin{cases} x > 3, \\ \frac{2x-5}{x-3} > -1 \end{cases} \right] \vee \left[\begin{cases} x < 3, \\ \frac{5-2x}{x-3} > -1; \end{cases} \right]$$



Ответ: $(2; 3) \cup (3; +\infty)$.

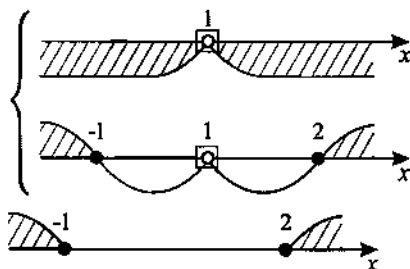
4. $\left| \frac{x-3}{x^2-2x+1} \right| \leq 1.$

$$\begin{cases} \frac{x-3}{x^2-2x+1} \leq 1, \\ \frac{x-3}{x^2-2x+1} \geq -1; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{x-3-x^2+2x-1}{(x-1)^2} \leq 0, \\ \frac{x-3+x^2-2x+1}{(x-1)^2} \geq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{-x^2+3x-4}{(x-1)^2} \leq 0, \\ \frac{x^2-x-2}{(x-1)^2} \geq 0. \end{cases}$$

$x^2-3x+4 > 0$ при всех x , т.к. $\begin{cases} a=1 > 0, \\ D < 0. \end{cases}$

$$\begin{cases} \frac{-1}{(x-1)^2} \leq 0, \\ \frac{(x-2)(x+1)}{(x-1)^2} \geq 0. \end{cases}$$

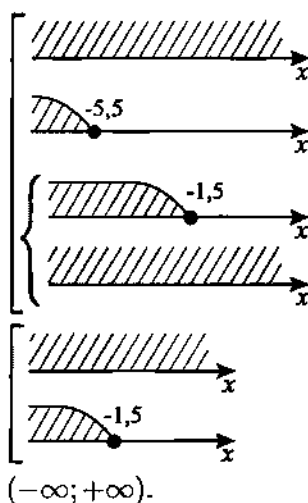


Ответ: $(-\infty; -1] \cup [2; +\infty)$.

$$5. \quad ||x+6|-4| \geq x+1.$$

$$\begin{cases} |x+6|-4 \geq x+1 \\ |x+6|-4 \leq -x-1; \end{cases} \quad \begin{cases} |x+6| \geq x+5 \\ |x+6| \leq 3-x; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{cases} x+6 \geq x+5 \\ x+6 \leq -x-5, \\ \begin{cases} x+6 \leq 3-x, \\ x+6 \geq x-3; \end{cases} \end{cases} & \begin{cases} 6 \geq 5, \\ x \leq -5,5, \\ \begin{cases} x \leq -1,5, \\ 6 \geq -3. \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$



Другой способ:

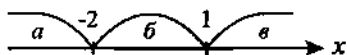
$$||x+6|-4| \geq x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \geq 0, \\ (||x+6|-4|)^2 \geq (x+1)^2 \\ x < -1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{cases} x \geq -1, & (|x+6| = x+6) \\ (x+6-4+x+1)(x+6-4-x-1) \geq 0 \end{cases} \\ x < -1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{cases} x \geq -1, \\ 2x+3 \geq 0 \\ x < -1; \end{cases} & \begin{cases} \begin{cases} x \geq -1, \\ x \geq -1,5 \\ x < -1; \end{cases} & \begin{cases} x \geq -1 \\ x < -1. \end{cases} \end{cases}$$

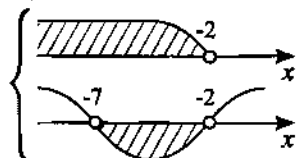
Ответ: $(-\infty; +\infty).$

$$6. (|x-1|-3)(|x+2|-5) < 0.$$



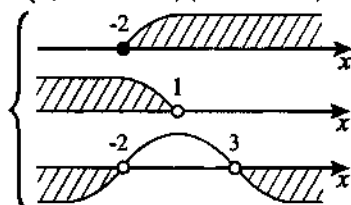
$$a) \begin{cases} x < -2, \begin{pmatrix} |x+2| = -x-2 \\ |x-1| = 1-x \end{pmatrix} \\ (1-x-3)(-x-2-5) < 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < -2, \\ (x+2)(x+7) < 0. \end{cases}$$



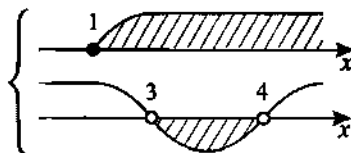
$(-7; -2);$

$$6) \begin{cases} x \geq -2, \begin{pmatrix} |x+2| = x+2 \\ |x-1| = 1-x \end{pmatrix} \\ x < 1, \\ (1-x-3)(x+2-5) < 0; \end{cases} \begin{cases} x \geq -2, \\ x < 1, \\ -(x+2)(x-3) < 0; \end{cases}$$



нет решений;

$$в) \begin{cases} x \geq 1, \begin{pmatrix} |x-1| = x-1 \\ |x+2| = x+2 \end{pmatrix} \\ (x-1-3)(x+2-5) < 0; \end{cases} \begin{cases} x \geq 1, \\ (x-4)(x-3) < 0; \end{cases}$$



$(3; 4).$

Ответ: $(-7; -2) \cup (3; 4).$

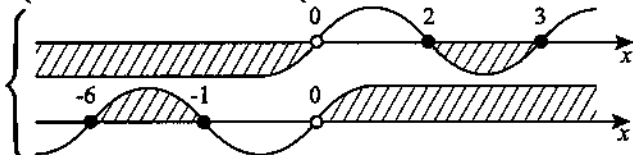
Решение тренировочной карточки 4

$$1. \left(x + \frac{6}{x}\right)^2 + 2\left(x + \frac{6}{x}\right) - 35 \leq 0.$$

Пусть $\left(x + \frac{6}{x}\right) = t$; $t^2 + 2t - 35 \leq 0$;



$$\begin{cases} t \leq 5, \\ t \geq -7. \end{cases} \quad \begin{cases} x + \frac{6}{x} \leq 5, \\ x + \frac{6}{x} \geq -7. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x^2 - 5x + 6}{x} \leq 0, \\ \frac{x^2 + 7x + 6}{x} \geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{(x-2)(x-3)}{x} \leq 0, \\ \frac{(x+6)(x+1)}{x} \geq 0. \end{cases}$$


Ответ: $[-6; -1] \cup [2; 3]$.

$$2. \left(\frac{2x+1}{x^2+x-20} - \frac{x-4}{2x^2+11x+5} \right) : \frac{3}{2x+1} \leq \frac{3}{x-4}.$$

$$2x^2+11x+5 = (2x+1)(x+5); \quad x^2+x-20 = (x+5)(x-4);$$

$$\left(\frac{2x+1}{(x+5)(x-4)} - \frac{x-4}{(2x+1)(x+5)} \right) \cdot \frac{2x+1}{3} - \frac{3}{x-4} \leq 0;$$

$$\frac{(2x+1)^2 - (x-4)^2}{(x+5)(x-4)(2x+1)} \cdot \frac{2x+1}{3} - \frac{3}{x-4} \leq 0;$$

$$\frac{(2x+1+x-4)(2x+1-x+4)}{(x+5)(x-4)(2x+1)} \cdot \frac{2x+1}{3} - \frac{3}{x-4} \leq 0;$$

$$\frac{3(x-1)(x+5)(2x+1)}{(x+5)(x-4)(2x+1)3} - \frac{3}{x-4} \leq 0;$$

$$\begin{cases} \frac{x-1}{x-4} - \frac{3}{x-4} \leq 0, \\ x \neq -0,5, \\ x \neq -5; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{x-4}{x-4} \leq 0, \\ x \neq -0,5, \\ x \neq -5; \end{cases} \quad \begin{cases} 1 \leq 0, \\ x \neq -0,5, \text{ нет} \\ x \neq -5, \text{ решений.} \\ x \neq 4; \end{cases}$$

Ответ: нет решений.

$$3. \quad x^2 - 8x - \frac{3}{|x-4|} + 18 \leq 0.$$

$$(x-4)^2 - \frac{3}{|x-4|} + 2 \leq 0. \text{ Пусть } |x-4| = t; \quad t^2 - \frac{3}{t} + 2 \leq 0;$$

$$\frac{t^3 + 2t - 3}{t} \leq 0; \quad \frac{(t-1)(t^2 + t + 3)}{t} \leq 0, \text{ так как}$$

$$\begin{array}{r} \frac{t^3 + 2t - 3}{t^3 - t^2} \quad \left| \frac{t-1}{t^2 + t + 3} \right. \\ \hline t^2 + 2t - 3 \\ t^2 - t \\ \hline 3t - 3 \\ 3t - 3 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$t^2 + t + 3 > 0 \text{ при всех } t, \text{ т.к. } \begin{cases} a = 1 > 0, \\ D = -11 < 0; \end{cases}$$

$$\frac{(t-1)(t^2 + t + 3)}{t} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{t-1}{t} \leq 0.$$

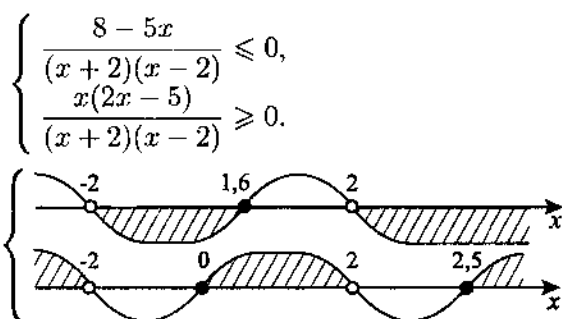


$$\begin{cases} |x-4| \leq 1, \\ |x-4| > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x-4 \leq 1, \\ x-4 \geq -1, \\ x \neq 4; \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq 5, \\ x \geq 3, \\ x \neq 4. \end{cases}$$

Ответ: $[3; 4) \cup (4; 5]$.

$$4. \quad \left| \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 4} \right| \leq 1.$$

$$\begin{cases} \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 4} \leq 1, \\ \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 4} \geq -1; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{x^2 - 5x + 4 - x^2 + 4}{x^2 - 4} \leq 0, \\ \frac{x^2 - 5x + 4 + x^2 - 4}{x^2 - 4} \geq 0; \end{cases}$$



Ответ: $[0; 1,6] \cup [2,5; +\infty)$.

5. $||x+5|-2x| > x+3$.

$$\begin{cases} |x+5|-2x > x+3 \\ |x+5|-2x < -x-3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} |x+5| > 3x+3 \\ |x+5| < x-3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{cases} x+5 > 3x+3 \\ x+5 < -3x-3, \end{cases} & \begin{cases} x < 1 \\ x < -2, \end{cases} \\ \begin{cases} x+5 < x-3, \\ x+5 > 3-x; \end{cases} & \begin{cases} 5 < -3, \\ x > -1; \end{cases} \end{cases}$$

$(-\infty; 1)$.

Другой способ:

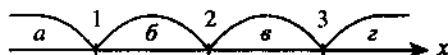
$$||x+5|-2x| > x+3 \Leftrightarrow \begin{cases} x+3 \geq 0 & |x+5| = x+5 \\ (|x+5|-2x)^2 > (x+3)^2 \\ x < -3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -3, \\ (x+5-2x+x+3)(x+5-2x-x-3) > 0 \\ x < -3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -3, \\ 8 \cdot (2-2x) > 0 \\ x < -3; \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq -3, \\ x < 1 \\ x < -3; \end{cases} \quad \begin{cases} -3 \leq x < 1 \\ x < -3. \end{cases} \quad (-\infty; 1).$$

Ответ: $(-\infty; 1)$.

$$6. |x-1| - |x-2| + |x-3| \geq x+5.$$



$$\text{а) } \begin{cases} x < 1, & \begin{cases} |x-1| = 1-x, \\ |x-2| = 2-x, \\ |x-3| = 3-x; \end{cases} \\ 1-x-(2-x)+(3-x) \geq x+5; \\ x < 1, \\ x \leq -1,5; \end{cases} \quad (-\infty; -1,5];$$

$$\text{б) } \begin{cases} x \geq 1, & \begin{cases} |x-1| = x-1 \\ |x-2| = 2-x \\ |x-3| = 3-x \end{cases} \\ x < 2, & \begin{cases} |x-1| = x-1 \\ |x-2| = 2-x \\ |x-3| = 3-x \end{cases} \\ x-1-(2-x)+(3-x) \geq x+5; \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 1, \\ x < 2, \\ 0 \geq 5; \end{cases}$$

нет решений;

$$\text{в) } \begin{cases} x \geq 2, & \begin{cases} |x-2| = x-2 \\ |x-3| = 3-x \\ |x-1| = x-1 \end{cases} \\ x < 3, & \begin{cases} |x-2| = x-2 \\ |x-3| = 3-x \\ |x-1| = x-1 \end{cases} \\ x-1-(x-2)+(3-x) \geq x+5; \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 2, \\ x < 3, \\ x \leq -0,5; \end{cases}$$

нет решений;

$$\text{г) } \begin{cases} x \geq 3, & \begin{cases} |x-3| = x-3 \\ |x-2| = x-2 \\ |x-1| = x-1 \end{cases} \\ x-1-x+2+x-3 \geq x+5; \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 3, \\ -2 \geq 5; \end{cases}$$

нет решений.

Ответ: $(-\infty; -1,5]$.

Решение тренировочной карточки 5

$$1. \frac{3-x}{(x+2)(x-1)} \leq \frac{2(3-x)}{2x^2-x-1}.$$

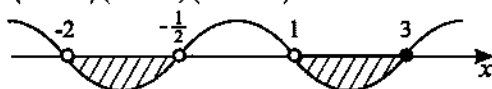
$$(3-x) \left(\frac{1}{(x+2)(x-1)} - \frac{2}{2x^2-x-1} \right) \leq 0.$$

$$2x^2-x-1 = (2x+1)(x-1).$$

$$(3-x) \left(\frac{1}{(x+2)(x-1)} - \frac{2}{(2x+1)(x-1)} \right) \leq 0;$$

$$\frac{(3-x)(2x+1-2(x+2))}{(x+2)(x-1)(2x+1)} \leq 0;$$

$$\frac{(3-x)(-3)}{(x+2)(x-1)(2x+1)} \leq 0.$$



$$\text{Ответ: } \left(-2; -\frac{1}{2}\right) \cup (1; 3].$$

$$2. \frac{x-3}{x^2+10x+21} + \frac{20}{3x^2+12x-63} \geq \frac{x-7}{9-x^2}.$$

$$\frac{x-3}{(x+3)(x+7)} + \frac{20}{3(x+7)(x-3)} + \frac{x-7}{(x-3)(x+3)} \geq 0;$$

$$\frac{3(x-3)^2 + 20(x+3) + 3(x+7)(x-7)}{3(x+3)(x-3)(x+7)} \geq 0;$$

$$\frac{3x^2 - 18x + 27 + 20x + 60 + 3x^2 - 147}{3(x+3)(x-3)(x+7)} \geq 0;$$

$$\frac{2(3x^2 + x - 30)}{3(x+3)(x-3)(x+7)} \geq 0; \quad \frac{2(3x+10)(x-3)}{3(x+3)(x-3)(x+7)} \geq 0.$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+360}}{6} = \frac{-1 \pm 19}{6}; \quad \begin{cases} x = 3 \\ x = -\frac{10}{3} \end{cases}$$

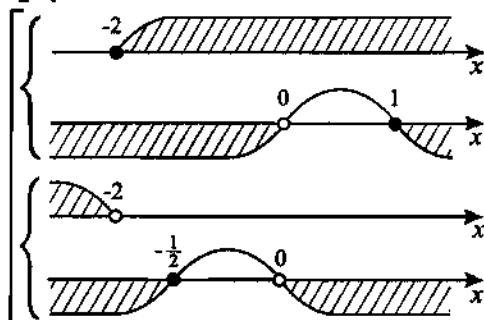


$$\text{Ответ: } \left(-7; -3\frac{1}{3}\right] \cup (-3; 3) \cup (3; +\infty).$$

$$3. \frac{|x+2| - x}{x} \leq 2.$$

$$\left[\begin{cases} x+2 \geq 0, \\ \frac{x+2-x}{x} \leq 2 \\ x+2 < 0, \\ \frac{-x-2-x}{x} \leq 2; \end{cases} \right. \quad \left[\begin{cases} x \geq -2, \\ \frac{2-2x}{x} \leq 0 \\ x < -2, \\ \frac{-2x-2-2x}{x} \leq 0; \end{cases} \right.$$

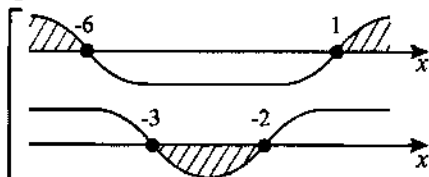
$$\left[\begin{cases} x \geq -2, \\ \frac{2(1-x)}{x} \leq 0 \\ x < -2, \\ \frac{-2(2x+1)}{x} \leq 0. \end{cases} \right.$$



Ответ: $(-\infty; 0) \cup [1; +\infty)$.

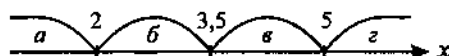
$$4. |x^2 + 5x| \geq 6.$$

$$\left[\begin{cases} x^2 + 5x \geq 6 \\ x^2 + 5x \leq -6; \end{cases} \right. \quad \left[\begin{cases} (x+6)(x-1) \geq 0 \\ (x+2)(x+3) \leq 0. \end{cases} \right.$$



Ответ: $(-\infty; -6] \cup [-3; -2] \cup [1; +\infty)$.

$$5. \quad 2|5-x| < |2-x| + |2x-7|.$$



$$а) \quad \begin{cases} x < 2, & \begin{pmatrix} |2-x| = 2-x \\ |5-x| = 5-x \\ |2x-7| = 7-2x \end{pmatrix} \\ 2(5-x) < (2-x) + 7-2x; \end{cases} \quad \begin{cases} x < 2, \\ x < -1; \end{cases} \quad (-\infty; -1);$$

$$б) \quad \begin{cases} x \geq 2, \\ x < 3,5, & \begin{pmatrix} |2-x| = x-2 \\ |2x-7| = 7-2x \\ |5-x| = 5-x \end{pmatrix} \\ 2(5-x) < x-2+7-2x; \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 2, \\ x < 3,5, \\ x > 5; \end{cases}$$

нет решений;

$$в) \quad \begin{cases} x \geq 3,5, \\ x < 5, & \begin{pmatrix} |2x-7| = 2x-7 \\ |2-x| = x-2 \\ |5-x| = 5-x \end{pmatrix} \\ 2(5-x) < x-2+2x-7; \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 3,5, \\ x < 5, \\ x > 3\frac{4}{5}; \end{cases} \quad (3,8; 5);$$

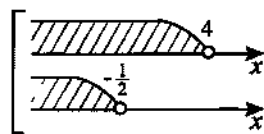
$$г) \quad \begin{cases} x \geq 5, & \begin{pmatrix} |5-x| = x-5 \\ |2-x| = x-2 \\ |2x-7| = 2x-7 \end{pmatrix} \\ 2(x-5) < x-2+2x-7; \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 5, \\ x > -1; \end{cases} \quad [5; +\infty).$$

Ответ: $(-\infty; -1) \cup (3,8; +\infty)$.

$$6. \quad ||x+5| - 2x| > x-3.$$

$$\begin{cases} |x+5| - 2x > x-3 \\ |x+5| - 2x < -x+3; \end{cases} \quad \begin{cases} |x+5| > 3x-3 \\ |x+5| < x+3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+5 > 3x-3 \\ x+5 < -3x+3, \\ \begin{cases} 5 < 3, \\ x > -4; \end{cases} \end{cases} \quad \begin{cases} x < 4 \\ x < -\frac{1}{2}. \end{cases}$$



Другой способ:

$$||x+5|-2x| > x-3 \Leftrightarrow \begin{cases} x-3 \geq 0 & (|x+5|=x+5), \\ (|x+5|-2x)^2 > (x-3)^2 \\ x < 3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 3, \\ (x+5-2x+x-3)(x+5-2x-x+3) > 0 \\ x < 3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 3, \\ 2 \cdot (-2x+8) > 0 \\ x < 3; \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 3, \\ x < 4 \\ x < 3; \end{cases} \quad \begin{cases} 3 \leq x < 4 \\ x < 3; \end{cases} \quad (-\infty; 4).$$

Ответ: $(-\infty; 4)$.

Решение тренировочной карточки 6

$$1. \frac{2}{x^2 - 3x - 4} \geq \frac{3}{x^2 + x - 6}.$$

$$\frac{2}{(x-4)(x+1)} - \frac{3}{(x+3)(x-2)} \geq 0;$$

$$\frac{2(x^2 + x - 6) - 3(x^2 - 3x - 4)}{(x-4)(x+1)(x+3)(x-2)} \geq 0;$$

$$\frac{2x^2 + 2x - 12 - 3x^2 + 9x + 12}{(x-4)(x+1)(x+3)(x-2)} \geq 0;$$

$$\frac{-x(x-11)}{(x-4)(x+1)(x+3)(x-2)} \geq 0.$$



Ответ: $(-3; -1) \cup [0; 2) \cup (4; 11]$.

$$2. \frac{x+4}{x^2 - 3x - 10} + \frac{x}{x^2 + 3x - 4} \geq \frac{2x+0,8}{x^2 - x - 20}.$$

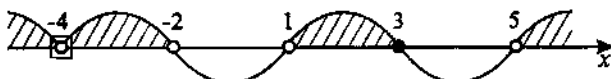
$$\frac{x+4}{(x-5)(x+2)} + \frac{x}{(x+4)(x-1)} - \frac{2x+0,8}{(x-5)(x+4)} \geq 0;$$

$$\frac{(x+4)^2(x-1) + x(x-5)(x+2) - (2x+0,8)(x+2)(x-1)}{(x-5)(x+2)(x+4)(x-1)} \geq 0;$$

$$\frac{x^3 + 8x^2 + 16x - x^2 - 8x - 16 + x^3 - 3x^2 - 10x - 2x^3 - 2,8x^2 + 3,2x + 1,6}{(x-5)(x+2)(x+4)(x-1)} \geq 0;$$

$$\frac{1,2x^2 + 1,2x - 14,4}{(x-5)(x+2)(x+4)(x-1)} \geq 0;$$

$$\frac{1,2(x+4)(x-3)}{(x-5)(x+2)(x+4)(x-1)} \geq 0.$$

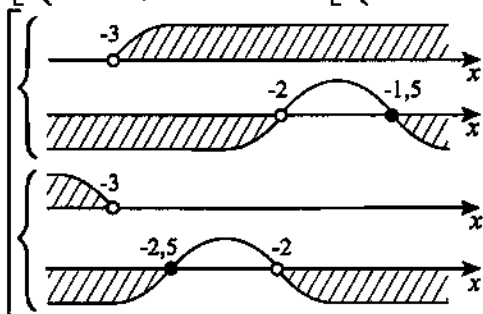


Ответ: $(-\infty; -4) \cup (-4; -2) \cup (1; 3] \cup (5; +\infty)$.

$$3. \frac{|x+3|}{x^2+5x+6} \leq 2.$$

$$x^2+5x+6=(x+2)(x+3);$$

$$\left[\begin{cases} x \geq -3, \\ \frac{1}{x+2} \leq 2, \\ x \neq -3 \\ x < -3, \\ \frac{-1}{x+2} \leq 2; \end{cases} \right. \quad \left[\begin{cases} x > -3, \\ \frac{1-2x-4}{x+2} \leq 0 \\ x < -3, \\ \frac{-1-2x-4}{x+2} \leq 0; \end{cases} \right. \quad \left[\begin{cases} x > -3, \\ \frac{-(2x+3)}{x+2} \leq 0 \\ x < -3, \\ \frac{-(2x+5)}{x+2} \leq 0. \end{cases} \right.$$



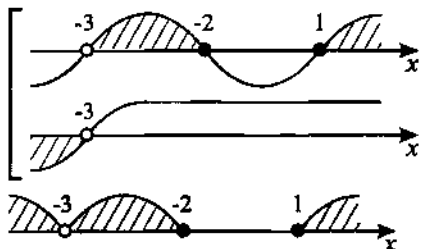
Ответ: $(-\infty; -3) \cup (-3; -2) \cup [-1, 5; +\infty)$.

$$4. \left| \frac{x^2+2x+1}{x+3} \right| \geq 1.$$

$$\left[\begin{cases} \frac{x^2+2x+1}{x+3} \geq 1 \\ \frac{x^2+2x+1}{x+3} \leq -1; \end{cases} \right. \quad \left[\begin{cases} \frac{x^2+2x+1-x-3}{x+3} \geq 0 \\ \frac{x^2+2x+1+x+3}{x+3} \leq 0; \end{cases} \right. \quad \left[\begin{cases} \frac{x^2+x-2}{x+3} \geq 0 \\ \frac{x^2+3x+4}{x+3} \leq 0; \end{cases} \right.$$

$x^2 + 3x + 4 > 0$ при всех x , т.к. $\begin{cases} a = 1 > 0, \\ D < 0. \end{cases}$

$$\begin{cases} \frac{(x+2)(x-1)}{x+3} \geq 0 \\ \frac{1}{x+3} \leq 0. \end{cases}$$



Ответ: $(-\infty; -3) \cup (-2; 1) \cup [1; +\infty)$.

5. $||x+5| - x + 2| \leq 1$.

$$\begin{cases} |x+5| - x + 2 \leq 1, \\ |x+5| - x + 2 \geq -1; \end{cases} \quad \begin{cases} |x+5| \leq x-1, \\ |x+5| \geq x-3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+5 \leq x-1, \\ x+5 \geq 1-x, \\ \begin{cases} x+5 \geq x-3 \\ x+5 \leq 3-x; \end{cases} \end{cases} \quad \begin{cases} 5 \leq -1, \\ x \geq -2, \\ \begin{cases} 5 \geq -3 \\ x \leq -1; \end{cases} \end{cases} \quad \text{нет решений.}$$

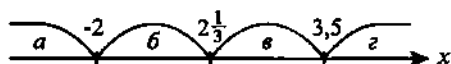
Другой способ:

$$||x+5| - x + 2| \leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x+5 \geq 0, \\ |x+5 - x + 2| \leq 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x+5 < 0, \\ |-x-5 - x + 2| \leq 1; \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{cases} x \geq -5, \\ 7 \leq 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x < -5, \\ |2x+3| \leq 1; \end{cases} \end{cases} \quad \begin{cases} \begin{cases} x < -5, \\ 2x+3 \leq 1, \\ 2x+3 \geq -1; \end{cases} \\ \begin{cases} x < -5, \\ x \leq -1, \\ x \geq -2; \end{cases} \end{cases} \quad \text{нет решений.}$$

Ответ: нет решений.

$$6. \quad 2|7 - 2x| < |7 - 3x| + |x + 2|.$$



$$а) \quad \begin{cases} x < -2, & \begin{cases} |x+2| = -x-2 \\ |7-2x| = 7-2x \\ |7-3x| = 7-3x \end{cases} \\ 2(7-2x) < 7-3x-x-2; \end{cases} \quad \begin{cases} x < -2, \\ 14 < 5; \end{cases}$$

нет решений;

$$б) \quad \begin{cases} x \geq -2, & \begin{cases} |x+2| = x+2 \\ |7-3x| = 7-3x \\ |7-2x| = 7-2x \end{cases} \\ x < 2\frac{1}{3}, & \begin{cases} |7-3x| = 7-3x \\ |7-2x| = 7-2x \end{cases} \\ 2(7-2x) < 7-3x+x+2; \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq -2, \\ x < 2\frac{1}{3}, \\ x > 2,5; \end{cases}$$

нет решений;

$$в) \quad \begin{cases} x \geq 2\frac{1}{3}, & \begin{cases} |7-3x| = 3x-7 \\ |7-2x| = 7-2x \\ |x+2| = x+2 \end{cases} \\ x < 3,5, & \begin{cases} |7-2x| = 7-2x \\ |x+2| = x+2 \end{cases} \\ 2(7-2x) < 3x-7+x+2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 2\frac{1}{3}, \\ x < 3,5, & \left(2\frac{3}{8}; 3,5\right); \\ x > 2\frac{3}{8}; \end{cases}$$

$$г) \quad \begin{cases} x \geq 3,5, & \begin{cases} |7-2x| = 2x-7 \\ |7-3x| = 3x-7 \\ |x+2| = x+2 \end{cases} \\ 2(2x-7) < 3x-7+x+2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 3,5, \\ -14 < -5; & [3,5; +\infty). \end{cases}$$

Ответ: $\left(2\frac{3}{8}; +\infty\right).$

Решение тренировочной карточки 7

$$1. \left(\frac{3-x}{2+x} \right)^2 > 1.$$

$$\left(\frac{3-x}{2+x} - 1 \right) \left(\frac{3-x}{2+x} + 1 \right) > 0;$$

$$\frac{3-x-x-2}{x+2} \cdot \frac{3-x+x+2}{x+2} > 0;$$

$$\frac{1-2x}{x+2} \cdot \frac{5}{x+2} > 0.$$



$$\text{Ответ: } (-\infty; -2) \cup \left(-2; \frac{1}{2} \right).$$

$$2. \frac{6x+7}{2x+3} \geq \frac{2x+8}{3x+7} \cdot \left(\frac{x+4}{2x^2+x-3} - \frac{2x+3}{x^2+3x-4} \right).$$

$$2x^2+x-3 = (2x+3)(x-1);$$

$$x^2+3x-4 = (x+4)(x-1).$$

$$\frac{6x+7}{2x+3} \geq \frac{2(x+4)}{3x+7} \cdot \left(\frac{x+4}{(2x+3)(x-1)} - \frac{2x+3}{(x+4)(x-1)} \right);$$

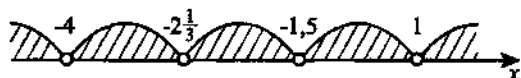
$$\frac{2(x+4)}{3x+7} \cdot \left(\frac{(x+4)^2 - (2x+3)^2}{(x+4)(x-1)(2x+3)} \right) - \frac{6x+7}{2x+3} \leq 0;$$

$$\frac{2(x+4)(x+4+2x+3)(x+4-2x-3)}{(3x+7)(x+4)(x-1)(2x+3)} - \frac{6x+7}{2x+3} \leq 0;$$

$$\frac{2(x+4)}{3x+7} \cdot \frac{(3x+7)(1-x)}{(x+4)(x-1)(2x+3)} - \frac{6x+7}{2x+3} \leq 0;$$

$$\begin{cases} \frac{-2}{(2x+3)} - \frac{6x+7}{2x+3} \leq 0, \\ x \neq -2\frac{1}{3}, \\ x \neq 1, \\ x \neq -4; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{-3(2x+3)}{2x+3} \leq 0, \\ x \neq -2\frac{1}{3}, \\ x \neq 1, \\ x \neq -4; \end{cases} \quad \begin{cases} -3 \leq 0, \\ x \neq -2\frac{1}{3}, \\ x \neq 1, \\ x \neq -4, \\ x \neq -1,5. \end{cases}$$



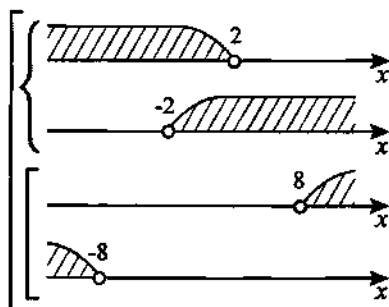
Ответ: $(-\infty; -4) \cup (-4; -2\frac{1}{3}) \cup (-2\frac{1}{3}; -1,5) \cup (-1,5; 1) \cup (1; +\infty)$.

3. $(|x| - 8)(|x| - 2) > 0$.

Пусть $|x| = t$ $(t - 8)(t - 2) > 0$.



$$\begin{cases} t < 2 \\ t > 8 \end{cases} \quad \begin{cases} |x| < 2 \\ |x| > 8 \end{cases} \quad \begin{cases} x < 2, \\ x > -2 \\ x > 8, \\ x < -8. \end{cases}$$

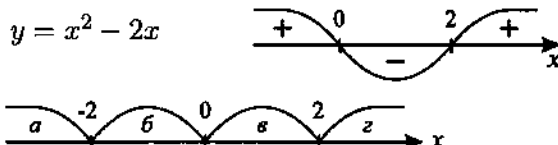


Ответ: $(-\infty; -8) \cup (-2; 2) \cup (8; +\infty)$.

$$4. \frac{|x^2 - 2x| + 4}{x^2 + |x + 2|} \geq 1.$$

Так как $|x + 2| \geq 0$, $x^2 + |x + 2| > 0$ при всех x ;

$$|x^2 - 2x| + 4 \geq x^2 + |x + 2|;$$



а) $x < -2$;

$$\begin{cases} x^2 - 2x > 0, & \left(\begin{array}{l} |x^2 - 2x| = x^2 - 2x \\ x + 2 < 0, & |x + 2| = -x - 2 \end{array} \right) \\ x^2 - 2x + 4 \geq x^2 - x - 2; \\ \begin{cases} x < -2, \\ x \leq 6; \end{cases} \end{cases} \quad (-\infty; -2);$$

б) $-2 \leq x < 0$;

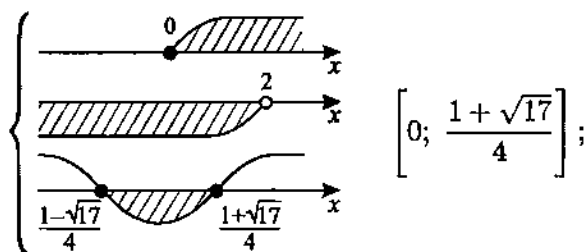
$$\begin{cases} x^2 - 2x > 0, & \left(\begin{array}{l} |x^2 - 2x| = x^2 - 2x \\ x + 2 \geq 0, & |x + 2| = x + 2 \end{array} \right) \\ x^2 - 2x + 4 \geq x^2 + x + 2; \\ \begin{cases} x \geq -2, \\ x < 0, \\ x \leq \frac{2}{3}; \end{cases} \end{cases} \quad [-2; 0);$$

в) $0 \leq x < 2$;

$$\begin{cases} x^2 - 2x \leq 0, & \left(\begin{array}{l} |x^2 - 2x| = -x^2 + 2x \\ x + 2 > 0, & |x + 2| = x + 2 \end{array} \right) \\ -x^2 + 2x + 4 \geq x^2 + x + 2; \\ \begin{cases} x \geq 0, \\ x < 2, \\ 2x^2 - x - 2 \leq 0; \end{cases} \end{cases}$$

$$2x^2 - x - 2 = 0;$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 16}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{4};$$



г) $x \geq 2$;

$$\begin{cases} x^2 - 2x \geq 0, \\ x + 2 > 0, \\ x^2 - 2x + 4 \geq x^2 + x + 2; \end{cases} \quad \left(\begin{cases} |x^2 - 2x| = x^2 - 2x \\ |x + 2| = x + 2 \end{cases} \right) \quad \begin{cases} x \geq 2, \\ x \leq \frac{2}{3}; \end{cases}$$

нет решений.

Ответ: $\left(-\infty; \frac{1 + \sqrt{17}}{4}\right]$.

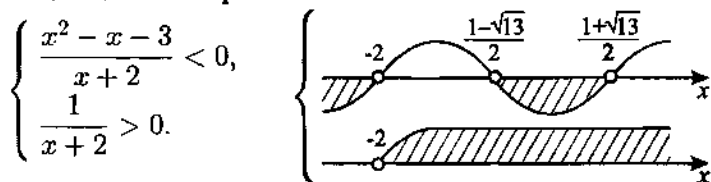
5. $\left| \frac{x^2 - 1}{x + 2} \right| < 1$.

$$\begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x + 2} < 1, \\ \frac{x^2 - 1}{x + 2} > -1; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{x^2 - 1 - x - 2}{x + 2} < 0, \\ \frac{x^2 - 1 + x + 2}{x + 2} > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x^2 - x - 3}{x + 2} < 0, \\ \frac{x^2 + x + 1}{x + 2} > 0. \end{cases}$$

$$x^2 - x - 3 = 0; \quad x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2};$$

$x^2 + x + 1 > 0$ при всех x .



Ответ: $\left(\frac{1 - \sqrt{13}}{2}; \frac{1 + \sqrt{13}}{2}\right)$.

6. $||x^2 - 3x + 2| - 1| > x - 2$.

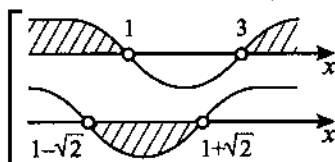
$$\begin{cases} |x^2 - 3x + 2| - 1 > x - 2 \\ |x^2 - 3x + 2| - 1 < -x + 2; \end{cases} \quad \begin{cases} |x^2 - 3x + 2| > x - 1 \\ |x^2 - 3x + 2| < 3 - x; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 3x + 2 > x - 1 \\ x^2 - 3x + 2 < 1 - x, \\ \begin{cases} x^2 - 3x + 2 < 3 - x, \\ x^2 - 3x + 2 > x - 3; \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 4x + 3 > 0 \\ x^2 - 2x + 1 < 0, \\ \begin{cases} x^2 - 2x - 1 < 0, \\ x^2 - 4x + 5 > 0; \end{cases} \end{cases} \quad \begin{cases} (x-1)(x-3) > 0 \\ (x-1)^2 < 0, \\ x^2 - 2x - 1 < 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-1)(x-3) > 0 \\ x \neq 1, \\ x^2 - 2x - 1 < 0. \end{cases}$$

$$x^2 - 2x - 1 = 0; \quad x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}.$$



Ответ: $(-\infty; 1 + \sqrt{2}) \cup (3; +\infty)$.

Решение тренировочной карточки 8

$$1. \frac{2}{x^3} - \frac{3}{x^2} > \frac{5}{x}.$$

$$\frac{2-3x-5x^2}{x^3} > 0. \quad 5x^2+3x-2=(5x-2)(x+1);$$

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+40}}{10} = \frac{-3 \pm 7}{10}; \quad \begin{cases} x = -1 \\ x = \frac{2}{5} \end{cases}$$

$$\frac{-(5x-2)(x+1)}{x^3} > 0.$$



$$\text{Ответ: } (-\infty; -1) \cup \left(0; \frac{2}{5}\right).$$

$$2. \frac{17,5x}{2+5x-3x^2} \geq \frac{x+2}{3x+1} + \frac{3x-1}{2-x}.$$

$$2+5x-3x^2=-(3x+1)(x-2);$$

$$3x^2-5x-2=0;$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25+24}}{6} = \frac{5 \pm 7}{6}; \quad \begin{cases} x = 2 \\ x = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\frac{x+2}{3x+1} - \frac{3x-1}{x-2} + \frac{17,5x}{(3x+1)(x-2)} \leq 0;$$

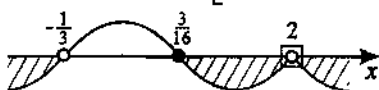
$$\frac{(x+2)(x-2) - (3x-1)(3x+1) + 17,5x}{(3x+1)(x-2)} \leq 0;$$

$$\frac{x^2-4-9x^2+1+17,5x}{(3x+1)(x-2)} \leq 0; \quad \frac{-8x^2+17,5x-3}{(3x+1)(x-2)} \leq 0;$$

$$\frac{-(16x^2-35x+6)}{(3x+1)(x-2)} \leq 0. \quad 16x^2-35x+6=0;$$

$$x_{1,2} = \frac{35 \pm \sqrt{1225-4 \cdot 6 \cdot 16}}{32} = \frac{35 \pm 29}{32}; \quad \begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{3}{16} \end{cases}$$

$$\frac{-(16x-3)(x-2)}{(3x+1)(x-2)} \leq 0.$$

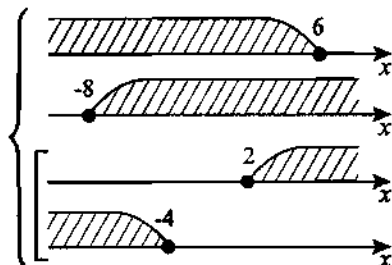


$$\text{Ответ: } \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right) \cup \left[\frac{3}{16}; 2\right) \cup (2; +\infty).$$

3. $||x+1|-5| \leq 2$.

$$\begin{cases} |x+1|-5 \leq 2, \\ |x+1|-5 \geq -2; \end{cases} \quad \begin{cases} |x+1| \leq 7, \\ |x+1| \geq 3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+1 \leq 7, \\ x+1 \geq -7, \\ \begin{cases} x+1 \geq 3 \\ x+1 \leq -3 \end{cases} \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq 6, \\ x \geq -8, \\ \begin{cases} x \geq 2 \\ x \leq -4. \end{cases} \end{cases}$$

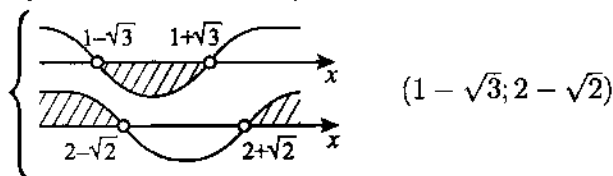


Ответ: $[-8; -4] \cup [2; 6]$.

4. $|x^2 - 3x| + x - 2 < 0$.

$$|x^2 - 3x| < 2 - x;$$

$$\begin{cases} x^2 - 3x < 2 - x, \\ x^2 - 3x > x - 2; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - 2x - 2 < 0, \\ x^2 - 4x + 2 > 0. \end{cases}$$



Другой способ:

$$|x^2 - 3x| + x - 2 < 0 \Leftrightarrow |x^2 - 3x| < 2 - x;$$

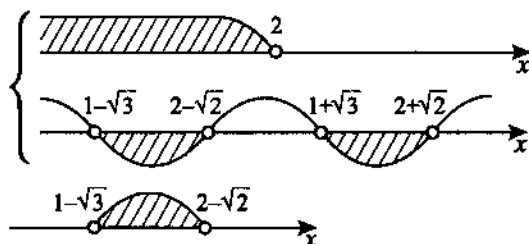
$$\begin{cases} 2 - x > 0, \\ (|x^2 - 3x|)^2 < (2 - x)^2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 2, \\ (x^2 - 3x + 2 - x)(x^2 - 3x - 2 + x) < 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 2, \\ (x^2 - 4x + 2)(x^2 - 2x - 2) < 0. \end{cases}$$

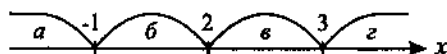
$$x^2 - 4x + 2 = 0; \quad x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{2};$$

$$x^2 - 2x - 2 = 0; \quad x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{3}.$$



Ответ: $(1 - \sqrt{3}; 2 - \sqrt{2})$.

5. $|x + 1| + |x - 2| - |x - 3| > 4$.



$$\text{а) } \begin{cases} x < -1, \begin{pmatrix} |x+1| = -x-1 \\ |x-2| = 2-x \\ |x-3| = 3-x \end{pmatrix} \\ -x-1-x+2-(3-x) > 4; \end{cases} \begin{cases} x < -1, \\ x < -6; \end{cases} \quad (-\infty; -6);$$

$$\text{б) } \begin{cases} x \geq -1, \begin{pmatrix} |x+1| = x+1 \\ |x-2| = 2-x \\ |x-3| = 3-x \end{pmatrix} \\ x < 2, \\ x+1+2-x-(3-x) > 4; \end{cases} \begin{cases} x \geq -1, \\ x < 2, \\ x > 4; \end{cases}$$

нет решений;

$$\text{в) } \begin{cases} x \geq 2, \begin{pmatrix} |x-2| = x-2 \\ |x-3| = 3-x \\ |x+1| = x+1 \end{pmatrix} \\ x < 3, \\ x+1+x-2-(3-x) > 4; \end{cases} \begin{cases} x \geq 2, \\ x < 3, \\ x > 2\frac{2}{3}; \end{cases} \quad \left(2\frac{2}{3}; 3\right);$$

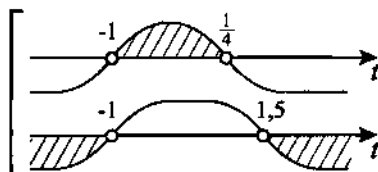
$$\text{г) } \begin{cases} x \geq 3, \begin{pmatrix} |x-3| = x-3 \\ |x-2| = x-2 \\ |x+1| = x+1 \end{pmatrix} \\ x+1+x-2-x+3 > 4; \end{cases} \begin{cases} x \geq 3, \\ x > 2; \end{cases} \quad [3; +\infty).$$

Ответ: $(-\infty; -6) \cup \left(2\frac{2}{3}; +\infty\right)$.

$$6. \left| \frac{2-3|x|}{1+|x|} \right| > 1.$$

Пусть $|x| = t$; $\left| \frac{2-3t}{1+t} \right| > 1.$

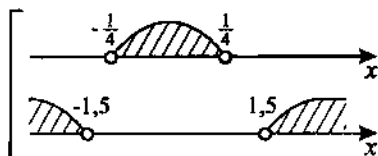
$$\left[\begin{array}{l} \frac{2-3t}{1+t} > 1 \\ \frac{2-3t}{1+t} < -1; \end{array} \right. \left[\begin{array}{l} \frac{2-3t-t-1}{1+t} > 0 \\ \frac{2-3t+t+1}{1+t} < 0; \end{array} \right. \left[\begin{array}{l} \frac{1-4t}{1+t} > 0 \\ \frac{3-2t}{1+t} < 0; \end{array} \right.$$



$$\left[\begin{array}{l} -1 < |x| < \frac{1}{4} \\ |x| < -1, \\ |x| > 1,5; \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} |x| < \frac{1}{4} \\ |x| > 1,5; \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x < \frac{1}{4}, \\ x > -\frac{1}{4} \\ x > 1,5, \\ x < -1,5. \end{array} \right.$$



Ответ: $(-\infty; -1,5) \cup \left(-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right) \cup (1,5; +\infty).$

Решение зачетных карточек заданий

Решение зачетной карточки 1

$$1. \left(\frac{4x^2 + 5x - 1}{2x^2 + 5x + 3} \right)^2 > 1.$$

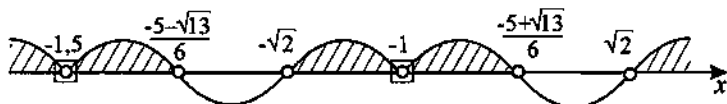
$$\left(\frac{4x^2 + 5x - 1}{2x^2 + 5x + 3} - 1 \right) \left(\frac{4x^2 + 5x - 1}{2x^2 + 5x + 3} + 1 \right) > 0;$$

$$\frac{4x^2 + 5x - 1 - 2x^2 - 5x - 3}{2x^2 + 5x + 3} \cdot \frac{4x^2 + 5x - 1 + 2x^2 + 5x + 3}{2x^2 + 5x + 3} > 0;$$

$$\frac{2(x^2 - 2)}{2x^2 + 5x + 3} \cdot \frac{2(3x^2 + 5x + 1)}{2x^2 + 5x + 3} > 0.$$

$$2x^2 + 5x + 3 = (x+1)(2x+3); \quad x_{1,2} = \frac{-5 \pm 1}{4}; \quad \begin{cases} x = -1,5 \\ x = -1; \end{cases}$$

$$3x^2 + 5x + 1 = 0; \quad x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{13}}{6}.$$



$$\text{Ответ: } (-\infty; -1,5) \cup \left(-1,5; -\frac{5 + \sqrt{13}}{6} \right) \cup (-\sqrt{2}; -1) \cup \left(-1; \frac{-5 + \sqrt{13}}{6} \right) \cup (\sqrt{2}; +\infty).$$

$$2. \frac{1}{x+2} + \frac{ax+6-2a-3x}{x-a-1} \left(\frac{a+3}{ax^2-3x^2-4a+12} - \frac{x+2}{a^2x-9x-2a^2+18} \right) \leq 0.$$

$$ax^2 - 3x^2 - 4a + 12 = (a-3)x^2 - 4(a-3) =$$

$$= (a-3)(x-2)(x+2);$$

$$a^2x - 9x - 2a^2 + 18 = a^2(x-2) - 9(x-2) = (x-2)(a+3)(a-3);$$

$$ax + 6 - 2a - 3x = a(x-2) - 3(x-2) = (a-3)(x-2).$$

$$\frac{1}{x+2} + \frac{(a-3)(x-2)}{x-a-1} \left(\frac{(a+3)^2 - (x+2)^2}{(a+3)(a-3)(x+2)(x-2)} \right) \leq 0;$$

$$\frac{1}{x+2} + \frac{(a-3)(x-2)}{x-a-1} \cdot \frac{(a+x+5)(a-x+1)}{(a+3)(a-3)(x+2)(x-2)} \leq 0;$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{x+2} - \frac{a+x+5}{(a+3)(x+2)} \leq 0, \\ a \neq 3, \\ x \neq a+1, \\ x \neq 2; \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{a+3-a-x-5}{(a+3)(x+2)} \leq 0, \\ a \neq 3, \\ x \neq a+1, \\ x \neq 2; \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{a+3} \leq 0, \\ a \neq 3, \\ x \neq a+1, \\ x \neq 2, \\ x \neq -2. \end{array} \right.$$

Ответ: при $a > -3$, $a \neq 3$ решением является любое число, кроме 2; -2 ; $a+1$; при $a \leq -3$; $a = 3$ решений нет.

$$3. \frac{x^2 - |x| - 6}{x-2} \geq 2x.$$

$$\left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} x \geq 0, \quad (|x| = x) \\ \frac{x^2 - x - 6}{x-2} \geq 2x \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} x < 0, \quad (|x| = -x) \\ \frac{x^2 + x - 6}{x-2} \geq 2x; \end{array} \right. \end{array} \right. \quad \left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} x \geq 0, \\ \frac{x^2 - x - 6 - 2x(x-2)}{x-2} \geq 0 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} x < 0, \\ x+3 \geq 2x, \\ x \neq 2; \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} x \geq 0, \\ \frac{x^2 - 3x + 6}{x-2} \leq 0 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} x < 0, \\ x \leq 3. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$x^2 - 3x + 6 > 0 \text{ при всех } x, \text{ т.к. } \begin{cases} a = 1 > 0 \\ D = -15 < 0. \end{cases}$$

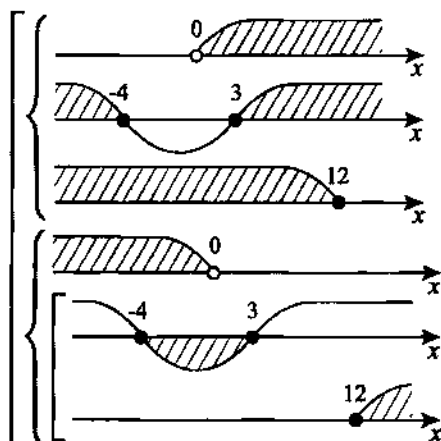
$$\left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} x \geq 0, \\ \frac{1}{x-2} \leq 0 \end{array} \right. \\ x < 0; \end{array} \right. \quad \left[\begin{array}{l} 0 \leq x < 2 \\ x < 0. \end{array} \right.$$

Ответ: $(-\infty; 2)$.

$$4. \frac{|24 - 2x - x^2|}{x} \leq x.$$

$$\left[\begin{cases} x > 0, \\ |24 - 2x - x^2| \leq x^2 \\ x < 0, \\ |24 - 2x - x^2| \geq x^2; \end{cases} \right. \left[\begin{cases} x > 0, \\ 24 - 2x - x^2 \leq x^2, \\ 24 - 2x - x^2 \geq -x^2 \\ x < 0, \\ \begin{cases} 24 - 2x - x^2 \geq x^2 \\ 24 - 2x - x^2 \leq -x^2; \end{cases} \end{cases} \right.$$

$$\left[\begin{cases} x > 0, \\ x^2 + x - 12 \geq 0, \\ x \leq 12 \\ x < 0, \\ \begin{cases} x^2 + x - 12 \leq 0 \\ x \geq 12; \end{cases} \end{cases} \right. \left[\begin{cases} x > 0, \\ (x+4)(x-3) \geq 0, \\ x \leq 12 \\ x < 0, \\ \begin{cases} (x+4)(x-3) \leq 0 \\ x \geq 12. \end{cases} \end{cases} \right.$$

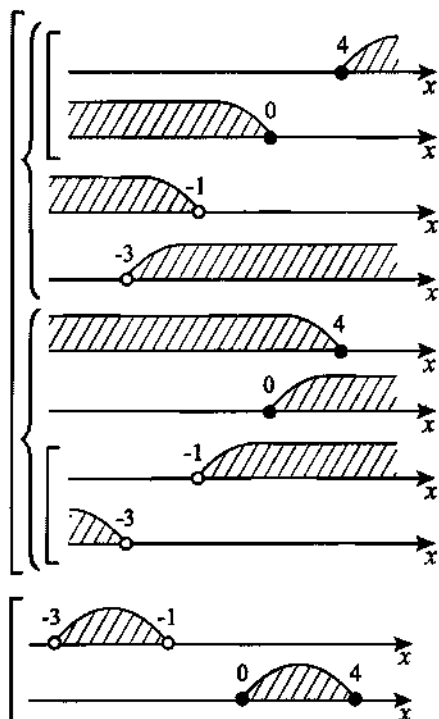


Ответ: $[-4; 0) \cup [3; 12]$.

$$5. \frac{2 - |x - 2|}{1 - |x + 2|} \leq 0.$$

$$\left[\begin{cases} 2 - |x - 2| \leq 0, \\ 1 - |x + 2| > 0 \\ 2 - |x - 2| \geq 0, \\ 1 - |x + 2| < 0; \end{cases} \right. \left[\begin{cases} |x - 2| \geq 2, \\ |x + 2| < 1 \\ |x - 2| \leq 2, \\ |x + 2| > 1; \end{cases} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x - 2 \geq 2 \\ x - 2 \leq -2, \\ x + 2 < 1, \\ x + 2 > -1 \end{array} \right. \quad \left[\begin{array}{l} x \geq 4 \\ x \leq 0, \\ x < -1, \\ x > -3 \end{array} \right. \\ \left[\begin{array}{l} x - 2 \leq 2, \\ x - 2 \geq -2, \\ x + 2 > 1 \end{array} \right. \quad \left[\begin{array}{l} x \leq 4, \\ x \geq 0, \\ x > -1 \end{array} \right. \\ \left[\begin{array}{l} x + 2 < -1; \end{array} \right. \quad \left[\begin{array}{l} x < -3. \end{array} \right. \end{array} \right.$$



Ответ: $(-3; -1) \cup [0; 4]$.

6. $|x^4 - 8x^3 + 17x^2 + 2x - 24| \leq |x^3 - 4x^2 + x + 6|$.

Пусть

$$f(x) = x^4 - 8x^3 + 17x^2 + 2x - 24;$$

$$f(-1) = 0.$$

$$\begin{array}{r}
 - \frac{x^4 - 8x^3 + 17x^2 + 2x - 24}{x^4 + x^3} \Bigg| \frac{x+1}{x^3 - 9x^2 + 26x - 24} \\
 - \frac{-9x^3 + 17x^2 + 2x - 24}{-9x^3 - 9x^2} \\
 \hline
 \frac{26x^2 + 2x - 24}{-26x^2 + 26x} \\
 - \frac{-24x - 24}{-24x - 24} \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

$$\varphi(x) = x^3 - 9x^2 + 26x - 24; \quad \varphi(2) = 0.$$

$$\begin{array}{r}
 - \frac{x^3 - 9x^2 + 26x - 24}{x^3 - 2x^2} \Bigg| \frac{x-2}{x^2 - 7x + 12} \\
 - \frac{-7x^2 + 26x - 24}{-7x^2 + 14x} \\
 \hline
 \frac{12x - 24}{-12x + 24} \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

$$f(x) = (x+1)(x-2)(x-3)(x-4).$$

$$\text{Пусть } g(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6; \quad g(-1) = 0.$$

$$\begin{array}{r}
 - \frac{x^3 - 4x^2 + x + 6}{x^3 + x^2} \Bigg| \frac{x+1}{x^2 - 5x + 6} \\
 - \frac{-5x^2 + x + 6}{-5x^2 - 5x} \\
 \hline
 \frac{6x + 6}{-6x + 6} \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

$$g(x) = (x+1)(x-2)(x-3);$$

$$|(x+1)(x-2)(x-3)(x-4)| \leq |(x+1)(x-2)(x-3)|;$$

$$|(x+1)(x-2)(x-3)|(|x-4| - 1) \leq 0;$$

$$\begin{cases} |(x+1)(x-2)(x-3)| = 0 \\ |x-4| \leq 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x+1)(x-2)(x-3) = 0 \\ \begin{cases} x-4 \leq 1, \\ x-4 \geq -1; \end{cases} \end{cases} \quad \begin{cases} x = -1 \\ x = 2, \\ x = 3, \\ \begin{cases} x \leq 5, \\ x \geq 3. \end{cases} \end{cases}$$

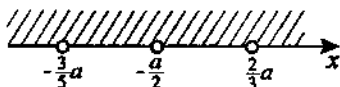
$$\text{Ответ: } [3; 5] \cup \{-1; 2\}.$$

$$\frac{2ax-2x^2}{2a-3x} + \frac{a+2x}{3a+5x} : \frac{(2a+x)(2a-x)-2a(a-2x)-x(3a+5x)}{(3a+5x)(2a-x)(a-2x)} > 0;$$

$$\begin{cases} \frac{2ax-2x^2}{2a-3x} + \frac{(2a-x)(a-2x)}{2a-3x} > 0, \\ 3a+5x \neq 0, \\ a+2x \neq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{2ax-2x^2+2a^2-5ax+2x^2}{2a-3x} > 0, \\ 3a+5x \neq 0, \\ a+2x \neq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{a(2a-3x)}{2a-3x} > 0, \\ x \neq -\frac{3}{5}a, \\ x \neq -\frac{a}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} a > 0, \\ x \neq \frac{2}{3}a, \\ x \neq -\frac{3}{5}a, \\ x \neq -\frac{a}{2}. \end{cases}$$

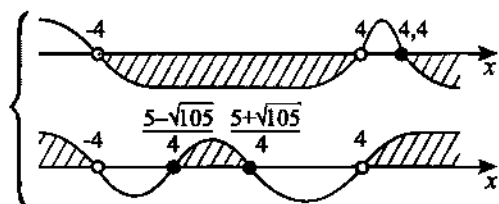


Ответ: при $a > 0$ решением является любое число, кроме $\frac{2}{3}a$; $-\frac{3}{5}a$; $-\frac{a}{2}$; при $a \leq 0$ решений нет.

$$3. \quad \left| \frac{x^2-5x+6}{x^2-16} \right| \leq 1.$$

$$\begin{cases} \frac{x^2-5x+6}{x^2-16} \leq 1, \\ \frac{x^2-5x+6}{x^2-16} \geq -1; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{x^2-5x+6-x^2+16}{x^2-16} \leq 0, \\ \frac{x^2-5x+6+x^2-16}{x^2-16} \geq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{22-5x}{(x+4)(x-4)} \leq 0, \\ \frac{2x^2-5x-10}{(x+4)(x-4)} \geq 0. \end{cases}$$



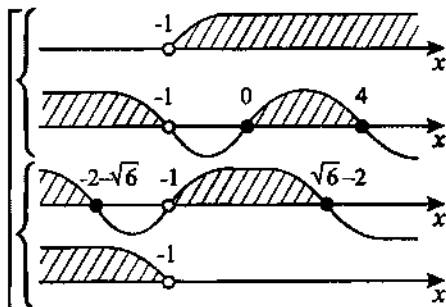
Ответ: $\left[\frac{5 - \sqrt{105}}{4}; \frac{5 + \sqrt{105}}{4} \right) \cup [4, +\infty)$.

4. $\frac{4x-1}{|x+1|} \geq x-1$.

$$\left[\begin{cases} x > -1, \\ \frac{4x-1}{x+1} \geq x-1 \\ x < -1, \\ \frac{1-4x}{x+1} \geq x-1; \end{cases} \right. \quad \left[\begin{cases} x > -1, \\ \frac{4x-1-x^2+1}{x+1} \geq 0 \\ x < -1, \\ \frac{1-4x-x^2+1}{x+1} \geq 0; \end{cases} \right.$$

$$\left[\begin{cases} x > -1, \\ \frac{x(4-x)}{x+1} \geq 0 \\ x < -1, \\ \frac{-(x^2+4x-2)}{x+1} \geq 0. \end{cases} \right.$$

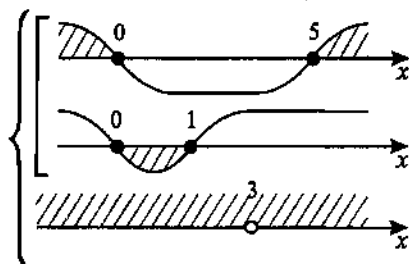
$$x^2 + 4x - 2 = 0; \quad x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{6}.$$



Ответ: $(-\infty; -2 - \sqrt{6}] \cup [0; 4]$.

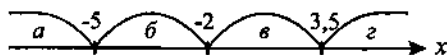
$$5. |x| \geq \frac{2x}{|x-3|}.$$

$$\begin{cases} |x-3| \cdot |x| \geq 2x, \\ x \neq 3; \end{cases} \quad \begin{cases} \begin{cases} x^2 - 3x \geq 2x \\ x^2 - 3x \leq -2x, \end{cases} \\ x \neq 3. \end{cases}$$



Ответ: $(-\infty; 1] \cup [5; +\infty)$.

$$6. |5+x| < |x+2| + |2x-7|.$$



$$a) \begin{cases} x < -5, \\ -x-5 < -x-2-2x+7; \end{cases} \quad \begin{cases} x < -5, \\ x < 5; \end{cases} \quad (-\infty; -5);$$

$$б) \begin{cases} x \geq -5, \\ x < -2, \\ x+5 < -x-2-2x+7; \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq -5, \\ x < -2, \\ x < 0; \end{cases} \quad [-5; -2);$$

$$в) \begin{cases} x \geq -2, \\ x < 3,5, \\ x+5 < x+2-2x+7; \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq -2, \\ x < 3,5, \\ x < 2; \end{cases} \quad [-2; 2);$$

$$г) \begin{cases} x \geq 3,5, \\ x+5 < x+2+2x-7; \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 3,5, \\ x > 5; \end{cases} \quad (5; +\infty).$$

Ответ: $(-\infty; 2) \cup (5; +\infty)$.

Решение зачетной карточки 3

$$1. \frac{(x-4)^2}{x^2-6x+9} > \frac{4x^2-12x+9}{(2x-1)^2}.$$

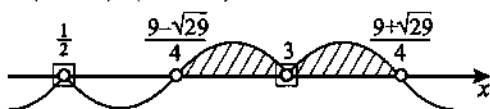
$$\left(\frac{4-x}{x-3}\right)^2 - \left(\frac{2x-3}{2x-1}\right)^2 > 0;$$

$$\left(\frac{4-x}{x-3} + \frac{2x-3}{2x-1}\right) \left(\frac{-x+4}{x-3} - \frac{2x-3}{2x-1}\right) > 0;$$

$$\frac{(4-x)(2x-1) + (2x-3)(x-3)}{(x-3)(2x-1)} \cdot \frac{(4-x)(2x-1) - (2x-3)(x-3)}{(x-3)(2x-1)} > 0;$$

$$\frac{(2x^2-9x+4-2x^2+9x-9)(2x^2-9x+4+2x^2-9x+9)}{(x-3)^2(2x-1)^2} > 0.$$

$$\frac{-5(4x^2-18x+13)}{(x-3)^2(2x-1)^2} > 0; \quad x_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{81-52}}{4} = \frac{9 \pm \sqrt{29}}{4}.$$



$$\text{Ответ: } \left(\frac{9-\sqrt{29}}{4}; 3\right) \cup \left(3; \frac{9+\sqrt{29}}{4}\right).$$

$$2. \frac{11}{4x^2+14x-8} - \frac{4-3x}{3x^2-8x-3} \geq \frac{2x+1}{2x^2+2x-24}.$$

$$4x^2+14x-8 = 2(2x-1)(x+4);$$

$$2x^2+7x-4 = 0;$$

$$x_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49+32}}{4} = \frac{-7 \pm 9}{4}; \quad \begin{cases} x = -4 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$3x^2-8x-3 = (3x+1)(x-3);$$

$$3x^2-8x-3 = 0;$$

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16+9}}{3} = \frac{4 \pm 5}{3}; \quad \begin{cases} x = 3 \\ x = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$2x^2+2x-24 = 2(x^2+x-12) = 2(x+4)(x-3).$$

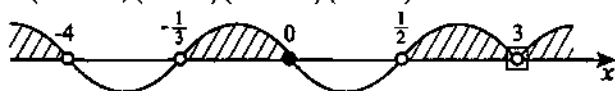
$$\frac{11}{2(2x-1)(x+4)} - \frac{4-3x}{(3x+1)(x-3)} - \frac{2x+1}{2(x+4)(x-3)} \geq 0;$$

$$\frac{11(3x+1)(x-3)-2(4-3x)(x+4)(2x-1)-(2x+1)(2x-1)(3x+1)}{2(2x-1)(x+4)(3x+1)(x-3)} \geq 0;$$

$$\frac{33x^2 - 88x - 33 + 12x^3 + 26x^2 - 80x + 32 - 12x^3 - 4x^2 + 3x + 1}{2(2x-1)(x+4)(3x+1)(x-3)} \geq 0;$$

$$\frac{55x^2 - 165x}{2(2x-1)(x+4)(3x+1)(x-3)} \geq 0;$$

$$\frac{55x(x-3)}{2(2x-1)(x+4)(3x+1)(x-3)} \geq 0.$$



Ответ: $(-\infty; -4) \cup \left(-\frac{1}{3}; 0\right] \cup \left(\frac{1}{2}; 3\right) \cup (3; +\infty).$

3. $||x+6|-4| < x+1.$

$$\begin{cases} |x+6|-4 < x+1, \\ |x+6|-4 > -x-1; \end{cases} \quad \begin{cases} |x+6| < x+5, \\ |x+6| > 3-x; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+6 < x+5, \\ x+6 > -x-5, \\ \begin{cases} x+6 > 3-x \\ x+6 < x-3; \end{cases} \end{cases} \quad \begin{cases} 6 < 5, \\ x > -5,5, \\ \begin{cases} x > -1,5 \\ 6 < -3; \end{cases} \end{cases} \quad \text{нет решений.}$$

Другой способ:

$$||x+6|-4| < x+1 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \begin{cases} x \geq -6, \\ |x+6|-4 < x+1 \\ x < -6, \\ |-x-6|-4 < x+1; \end{cases} & \begin{cases} x \geq -6, \\ |x+2| < x+1; \\ x < -6, \\ |x+10| < x+1; \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -6, \\ x+1 > 0, \\ (|x+2|)^2 < (x+1)^2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > -1, \\ (x+2+x+1)(x+2-x-1) < 0; \end{cases}$$

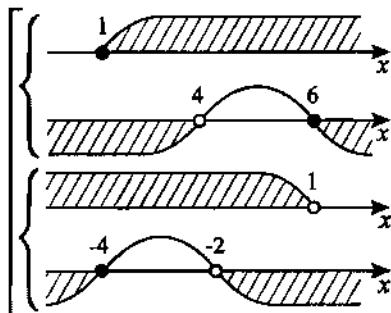
$$\begin{cases} x > -1, \\ (2x+3) \cdot 1 < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x > -1, \\ x < -1,5; \end{cases} \quad \text{нет решений.}$$

Ответ: нет решений.

$$4. \frac{1}{|x-1|-3} \leq \frac{1}{2}.$$

$$\left[\begin{cases} x \geq 1, \\ \frac{1}{x-1-3} \leq \frac{1}{2} \\ x < 1, \\ \frac{1}{1-x-3} \leq \frac{1}{2}; \end{cases} \right. \quad \left[\begin{cases} x \geq 1, \\ \frac{2-x+4}{2(x-4)} \leq 0 \\ x < 1, \\ \frac{-2-x-2}{2(x+2)} \leq 0; \end{cases} \right.$$

$$\left[\begin{cases} x \geq 1, \\ \frac{6-x}{2(x-4)} \leq 0 \\ x < 1, \\ \frac{-(x+4)}{2(x+2)} \leq 0. \end{cases} \right.$$



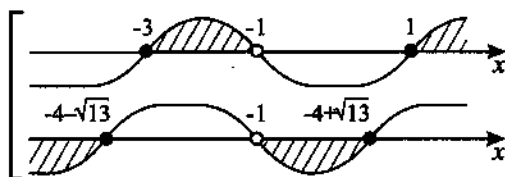
Ответ: $(-\infty; -4] \cup (-2; 4) \cup [6; +\infty)$.

$$5. \left| \frac{x^2 + 5x}{x+1} \right| \geq 3.$$

$$\left[\begin{cases} \frac{x^2 + 5x}{x+1} \geq 3 \\ \frac{x^2 + 5x}{x+1} \leq -3; \end{cases} \right. \quad \left[\begin{cases} \frac{x^2 + 5x - 3x - 3}{x+1} \geq 0 \\ \frac{x^2 + 5x + 3x + 3}{x+1} \leq 0; \end{cases} \right.$$

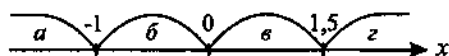
$$\left[\begin{cases} \frac{x^2 + 2x - 3}{x+1} \geq 0 \\ \frac{x^2 + 8x + 3}{x+1} \leq 0. \end{cases} \right.$$

$$x^2 + 8x + 3 = 0; \quad x_{1,2} = -4 \pm \sqrt{13}.$$



Ответ: $(-\infty; -4 - \sqrt{13}] \cup [-3; -1) \cup (-1; -4 + \sqrt{13}] \cup [1; +\infty)$.

6. $|x + 1| - |x| + |2x - 3| > 2x + 4$.



а) $\begin{cases} x < -1, \\ -x - 1 + x + 3 - 2x > 2x + 4; \end{cases}$
 $\begin{cases} x < -1, \\ x < -\frac{1}{2}; \end{cases} \quad (-\infty; -1);$

б) $\begin{cases} x \geq -1, \\ x < 0, \\ x + 1 + x + 3 - 2x > 2x + 4; \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq -1, \\ x < 0, \\ x < 0; \end{cases} \quad [-1; 0);$

в) $\begin{cases} x \geq 0, \\ x < 1,5, \\ x + 1 - x + 3 - 2x > 2x + 4; \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 0, \\ x < 1,5, \\ x < 0; \end{cases}$

нет решений;

г) $\begin{cases} x \geq 1,5, \\ x + 1 - x - 3 + 2x > 2x + 4; \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 1,5, \\ -2 > 4; \end{cases}$
 нет решений.

Ответ: $(-\infty; 0)$.

Решение зачетной карточки 4

$$1. \frac{(x+4)^2}{x^2+6x+9} > \frac{4x^2-12x+9}{(2x-1)^2}.$$

$$\left(\frac{x+4}{x+3}\right)^2 - \left(\frac{2x-3}{2x-1}\right)^2 > 0;$$

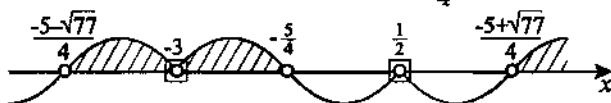
$$\left(\frac{x+4}{x+3} + \frac{2x-3}{2x-1}\right) \cdot \left(\frac{x+4}{x+3} - \frac{2x-3}{2x-1}\right) > 0;$$

$$\frac{(x+4)(2x-1) + (2x-3)(x+3)}{(x+3)(2x-1)} \cdot \frac{(x+4)(2x-1) - (2x-3)(x+3)}{(x+3)(2x-1)} > 0;$$

$$\frac{(2x^2+7x-4+2x^2+3x-9)(2x^2+7x-4-2x^2-3x+9)}{(x+3)^2(2x-1)^2} > 0;$$

$$\frac{(4x^2+10x-13)(4x+5)}{(x+3)^2(2x-1)^2} > 0.$$

$$4x^2+10x-13=0; \quad x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{77}}{4}.$$



$$\text{Ответ: } \left(\frac{-5-\sqrt{77}}{4}; -3\right) \cup \left(-3; -\frac{5}{4}\right) \cup \left(\frac{-5+\sqrt{77}}{4}; +\infty\right).$$

$$2. \left(\frac{2c+3x}{2x^2-cx-3c^2} - \frac{5c}{6x^2-13cx+6c^2} + \frac{5x}{2c^2-cx-3x^2}\right) \frac{x+c}{x-9c} \geq \frac{0,2}{2c-3x}.$$

$$2x^2 - cx - 3c^2 = (2x - 3c)(x + c). \quad 2x^2 - cx - 3c^2 = 0;$$

$$x_{1,2} = \frac{c \pm \sqrt{c^2 + 24c^2}}{4} = \frac{c \pm 5c}{4}; \quad \begin{cases} x = -c \\ x = \frac{3}{2}c; \end{cases}$$

$$6x^2 - 13cx + 6c^2 = (3x - 2c)(2x - 3c);$$

$$6x^2 - 13cx + 6c^2 = 0;$$

$$x_{1,2} = \frac{13c \pm \sqrt{169c^2 - 144c^2}}{12} = \frac{13c \pm 5c}{12}; \quad \begin{cases} x = \frac{3}{2}c \\ x = \frac{2}{3}c; \end{cases}$$

$$2c^2 - cx - 3x^2 = (2c - 3x)(c + x);$$

$$c_{1,2} = \frac{x \pm \sqrt{x^2 + 24x^2}}{4}; \quad \begin{cases} c = -x \\ c = \frac{3}{2}x; \end{cases}$$

$$\left(\frac{2c+3x}{(2x-3c)(x+c)} - \frac{5c}{(3x-2c)(2x-3c)} + \frac{5x}{(2c-3x)(c+x)} \right) \frac{x+c}{x-9c} \geq \frac{0,2}{2c-3x};$$

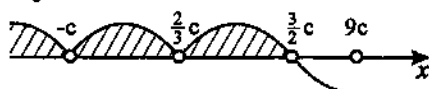
$$\frac{(2c+3x)(3x-2c)-5c(x+c)-5x(2x-3c)}{(2x-3c)(3x-2c)(x+c)} \cdot \frac{x+c}{x-9c} - \frac{0,2}{2c-3x} \geq 0;$$

$$\frac{-x^2+10cx-9c^2}{(2x-3c)(3x-2c)(x+c)} \cdot \frac{x+c}{x-9c} - \frac{0,2}{2c-3x} \geq 0;$$

$$\begin{cases} \frac{c-x+0,2(2x-3c)}{(3x-2c)(2x-3c)} \geq 0, \\ x \neq -c, \\ x \neq 9c; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{0,2(2c-3x)}{(3x-2c)(2x-3c)} \geq 0, \\ x \neq -c, \\ x \neq 9c; \end{cases}$$

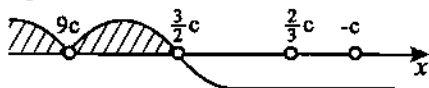
$$\begin{cases} \frac{-0,2}{2x-3c} \geq 0, \\ x \neq -c, \\ x \neq 9c, \\ x \neq \frac{2}{3}c; \end{cases} \quad \begin{cases} x < \frac{3}{2}c, \\ x \neq -c, \\ x \neq 9c, \\ x \neq \frac{2}{3}c. \end{cases}$$

а) При $c > 0$



$$(-\infty; -c) \cup \left(-c; \frac{2}{3}c\right) \cup \left(\frac{2}{3}c; \frac{3}{2}c\right);$$

б) при $c < 0$



$$(-\infty; 9c) \cup \left(9c; \frac{3}{2}c\right).$$

Ответ: при $c > 0$ $x \in (-\infty; -c) \cup \left(-c; \frac{2}{3}c\right) \cup \left(\frac{2}{3}c; \frac{3}{2}c\right)$;

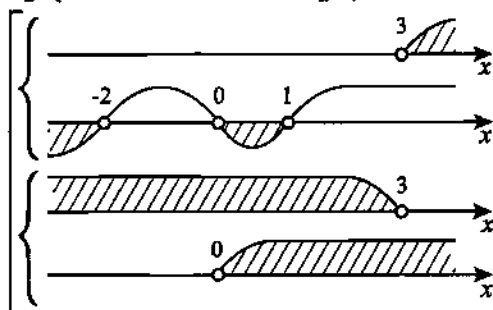
при $c < 0$ $x \in (-\infty; 9c) \cup \left(9c; \frac{3}{2}c\right)$;

при $c = 0$ $x < 0$.

$$3. \frac{x^2 - 2x - 3}{|x - 3|} < \frac{2}{x}.$$

$$\left[\begin{cases} x > 3, \\ \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 3} < \frac{2}{x} \\ x < 3, \\ \frac{x^2 - 2x - 3}{3 - x} < \frac{2}{x}; \end{cases} \right. \quad \left[\begin{cases} x > 3, \\ x + 1 < \frac{2}{x} \\ x < 3, \\ -x - 1 < \frac{2}{x}; \end{cases} \right.$$

$$\left[\begin{cases} x > 3, \\ \frac{x^2 + x - 2}{x} < 0 \\ x < 3, \\ \frac{x^2 + x + 2}{x} > 0; \end{cases} \right. \quad \left[\begin{cases} x > 3, \\ \frac{(x + 2)(x - 1)}{x} < 0 \\ x < 3, \\ \frac{1}{x} > 0. \end{cases} \right.$$



Ответ: $(0; 3)$.

$$4. ||x + 7| - 2x| < x + 1.$$

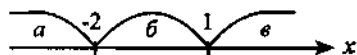
$$\begin{cases} |x + 7| - 2x < x + 1, \\ |x + 7| - 2x > -x - 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} |x + 7| < 3x + 1, \\ |x + 7| > x - 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 7 < 3x + 1, \\ x + 7 > -3x - 1, \\ \begin{cases} x + 7 > x - 1 \\ x + 7 < 1 - x; \end{cases} \end{cases} \quad \begin{cases} x > 3, \\ x > -2, \\ \begin{cases} 7 > -1 \\ x < -3. \end{cases} \end{cases}$$

Ответ: $(3; +\infty)$.

5. $|x+2| + |x-1| < 3x$.



а) $\begin{cases} x < -2, \\ -x-2+1-x < 3x; \end{cases} \quad \begin{cases} x < -2, \\ x > -\frac{1}{5}; \end{cases} \quad \text{нет решений;}$

б) $\begin{cases} x \geq -2, \\ x < 1, \\ x+2+1-x < 3x; \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq -2, \\ x < 1, \\ x > 1; \end{cases} \quad \text{нет решений;}$

в) $\begin{cases} x \geq 1, \\ x+2+x-1 < 3x; \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 1, \\ x > 1; \end{cases} \quad (1; +\infty).$

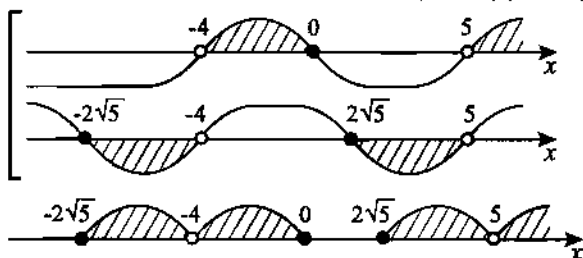
Ответ: $(1; +\infty)$.

6. $\left| \frac{x^2+x-20}{x^2-x-20} \right| \geq 1$.

$$\begin{cases} \frac{x^2+x-20}{x^2-x-20} \geq 1 \\ \frac{x^2+x-20}{x^2-x-20} \leq -1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x^2+x-20-x^2+x+20}{x^2-x-20} \geq 0 \\ \frac{x^2+x-20+x^2-x-20}{x^2-x-20} \leq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{2x}{(x-5)(x+4)} \geq 0 \\ \frac{2(x^2-20)}{(x-5)(x+4)} \leq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{2x}{(x-5)(x+4)} \geq 0 \\ \frac{2(x-2\sqrt{5})(x+2\sqrt{5})}{(x-5)(x+4)} \leq 0. \end{cases}$$



Ответ: $[-2\sqrt{5}; -4) \cup (-4; 0] \cup [2\sqrt{5}; 5) \cup (5; +\infty)$.

Решение зачетной карточки 5

$$1. \frac{6x^2 - x - 18}{3x^2 - 12} + \frac{5 - 2x}{2 - x} \leq 5 + \frac{1}{x - 2}.$$

$$\frac{6x^2 - x - 18 - 3(5 - 2x)(x + 2) - 5(3x^2 - 12) - 3(x + 2)}{3(x - 2)(x + 2)} \leq 0;$$

$$\frac{6x^2 - x - 18 + 6x^2 - 3x - 30 - 15x^2 + 60 - 3x - 6}{3(x - 2)(x + 2)} \leq 0;$$

$$\frac{-3x^2 - 7x + 6}{3(x - 2)(x + 2)} \leq 0.$$

$$-3x^2 - 7x + 6 = -(3x - 2)(x + 3); \quad 3x^2 + 7x - 6 = 0;$$

$$x_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 72}}{6} = \frac{-7 \pm 11}{6}; \quad \begin{cases} x = -3 \\ x = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\frac{-(3x - 2)(x + 3)}{3(x - 2)(x + 2)} \leq 0.$$



$$\text{Ответ: } (-\infty; -3] \cup \left(-2; \frac{2}{3}\right] \cup (2; +\infty).$$

$$2. \left(\frac{a + 5b}{6a^2 + 17ab - 3b^2} - \frac{a + 3b}{6a^2 + 29ab - 5b^2} \right) : \frac{a + 4b}{a^2 + 8ab + 15b^2} \leq \frac{24a}{6a - b}.$$

$$6a^2 + 17ab - 3b^2 = (6a - b)(a + 3b);$$

$$a_{1,2} = \frac{-17b \pm \sqrt{289b^2 + 72b^2}}{12} = \frac{-17b \pm 19b}{12}; \quad \begin{cases} a = \frac{b}{6} \\ a = -3b; \end{cases}$$

$$6a^2 + 29ab - 5b^2 = (6a - b)(a + 5b);$$

$$a_{1,2} = \frac{-29b \pm \sqrt{841b^2 + 120b^2}}{12} = \frac{-29b \pm 31b}{12}; \quad \begin{cases} a = \frac{b}{6} \\ a = -5b; \end{cases}$$

$$a^2 + 8ab + 15b^2 = (a + 3b)(a + 5b);$$

$$a_{1,2} = -4b \pm \sqrt{16b^2 - 15b^2} = -4b \pm b; \quad \begin{cases} a = -5b \\ a = -3b. \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{a+5b}{(6a-b)(a+3b)} - \frac{a+3b}{(6a-b)(a+5b)} \right) \cdot \frac{(a+3b)(a+5b)}{a+4b} - \frac{24a}{6a-b} \leq 0; \\
 & \begin{cases} \frac{(a+5b+a+3b)(a+5b-a-3b)}{(6a-b)(a+4b)} - \frac{24a}{6a-b} \leq 0, \\ a \neq -3b, \\ a \neq -5b; \end{cases} \\
 & \begin{cases} \frac{2(a+4b)2b}{(6a-b)(a+4b)} - \frac{24a}{6a-b} \leq 0, \\ a \neq -3b, \\ a \neq -5b, \\ a \neq -4b; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{4b-24a}{6a-b} \leq 0, \\ a \neq -3b, \\ a \neq -5b, \\ a \neq -4b; \end{cases} \\
 & \begin{cases} \frac{4(b-6a)}{6a-b} \leq 0, \\ a \neq -3b, \\ a \neq -5b, \\ a \neq -4b; \end{cases} \quad \begin{cases} -4 \leq 0, \\ a \neq -3b, \\ a \neq -5b, \\ a \neq -4b, \\ a \neq \frac{b}{6}; \end{cases} \quad \begin{cases} a \neq -3b, \\ a \neq -4b, \\ a \neq -5b, \\ a \neq \frac{b}{6}. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Ответ: все значение a и b , кроме $a \neq -3b$; $a \neq -4b$;
 $a \neq -5b$; $a \neq \frac{b}{6}$.

3. $||x-6|-3| < x-1$.

$$\begin{cases} |x-6|-3 < x-1, \\ |x-6|-3 > 1-x; \end{cases} \quad \begin{cases} |x-6| < x+2, \\ |x-6| > 4-x; \end{cases} \\
 \begin{cases} x-6 < x+2, \\ x-6 > -x-2, \\ \begin{cases} x-6 > 4-x \\ x-6 < x-4; \end{cases} \end{cases} \quad \begin{cases} -6 < 2, \\ x > 2, \\ \begin{cases} x > 5 \\ -6 < -4; \end{cases} \end{cases} \quad x > 2.$$

Ответ: $(2; +\infty)$.

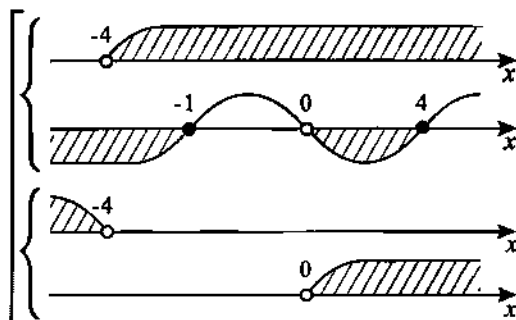
4. $\frac{x^2+x-12}{|x+4|} \leq \frac{4}{x}$.

$$\begin{cases} \begin{cases} x+4 \geq 0, \\ \frac{x^2+x-12}{x+4} \leq \frac{4}{x} \end{cases} \\ \begin{cases} x+4 < 0, \\ \frac{x^2+x-12}{-(x+4)} \leq \frac{4}{x}; \end{cases} \end{cases}$$

$$\left[\begin{cases} x > -4, \\ x - 3 \leq \frac{4}{x} \\ x < -4, \\ 3 - x \leq \frac{4}{x}; \end{cases} \right] \left[\begin{cases} x > -4, \\ \frac{x^2 - 3x - 4}{x} \leq 0 \\ x < -4, \\ \frac{x^2 - 3x + 4}{x} \geq 0. \end{cases} \right.$$

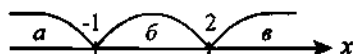
$x^2 - 3x + 4 > 0$ при всех x .

$$\left[\begin{cases} x > -4, \\ \frac{(x-4)(x+1)}{x} \leq 0; \\ x < -4, \\ \frac{1}{x} \geq 0. \end{cases} \right.$$

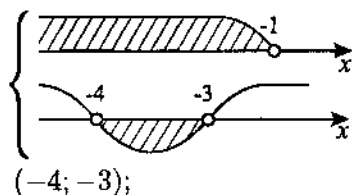


Ответ: $(-4; -1] \cup (0; 4]$.

5. $(|x+1|-3)(|x-2|-5) < 0$.



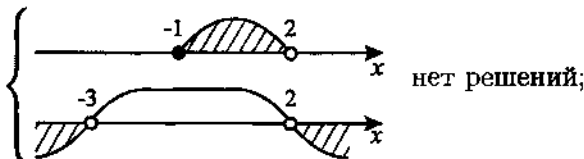
а) $\begin{cases} x < -1, \\ (-x-1-3)(2-x-5) < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x < -1, \\ (x+4)(x+3) < 0. \end{cases}$



$(-4; -3);$

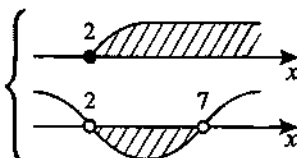
$$б) \begin{cases} x \geq -1, \\ x < 2, \\ (x+1-3)(2-x-5) < 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -1, \\ x < 2, \\ (x-2)(-(x+3)) < 0; \end{cases}$$



$$в) \begin{cases} x \geq 2, \\ (x+1-3)(x-2-5) < 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 2, \\ (x-2)(x-7) < 0. \end{cases}$$

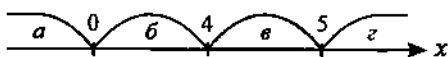


$(2; 7)$.

Ответ: $(-4; -3) \cup (2; 7)$.

$$6. \frac{|x^2 - 4x| + 3}{x^2 + |x - 5|} \geq 1.$$

$|x^2 - 4x| + 3 \geq x^2 + |x - 5|$, так как $x^2 + |x - 5| > 0$ при всех x .



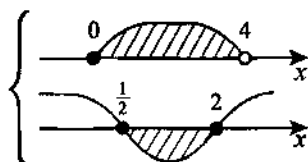
$$y = x^2 - 4x$$



$$а) \begin{cases} x < 0, \\ x^2 - 4x + 3 \geq x^2 + 5 - x; \end{cases} \quad \begin{cases} x < 0, \\ 3x \leq -2; \end{cases}$$

$$\left(-\infty; -\frac{2}{3}\right];$$

$$\begin{aligned}
 \text{б) } & \begin{cases} x \geq 0, \\ x < 4, \\ 4x - x^2 + 3 \geq x^2 + 5 - x; \end{cases} \\
 & \begin{cases} x \geq 0, \\ x < 4, \\ 2x^2 - 5x + 2 \leq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 0, \\ x < 4, \\ 2(x-2)\left(x - \frac{1}{2}\right) \leq 0; \end{cases}
 \end{aligned}$$



$$\left[\frac{1}{2}; 2\right];$$

$$\text{в) } \begin{cases} x \geq 4, \\ x < 5, \\ x^2 - 4x + 3 \geq x^2 + 5 - x; \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 4, \\ x < 5, \\ 3x \leq -2; \end{cases}$$

нет решений;

$$\text{г) } \begin{cases} x \geq 5, \\ x^2 - 4x + 3 \geq x^2 + x - 5; \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 5, \\ 5x \leq 8; \end{cases}$$

нет решений.

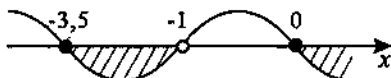
$$\text{Ответ: } \left(-\infty; -\frac{2}{3}\right] \cup \left[\frac{1}{2}; 2\right].$$

Решение зачетной карточки 6

$$1. \frac{5}{(x+1)^3} - \frac{3}{(x+1)^2} \leq \frac{2}{x+1}.$$

$$\frac{5 - 3(x+1) - 2(x+1)^2}{(x+1)^3} \leq 0;$$

$$\frac{5 - 3x - 3 - 2x^2 - 4x - 2}{(x+1)^3} \leq 0; \quad \frac{-x(2x+7)}{(x+1)^3} \leq 0.$$



Ответ: $[-3,5; -1) \cup [0; +\infty)$.

$$2. \left(\frac{2+3x}{2x^2-x-3} - \frac{5}{6x^2-13x+6} + \frac{5x}{2-x-3x^2} \right) \frac{x+1}{x-9} \geq \frac{0,2}{2-3x}.$$

$$2x^2 - x - 3 = (2x - 3)(x + 1);$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{4} = \frac{1 \pm 5}{4}; \quad \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ x = -1; \end{cases}$$

$$6x^2 - 13x + 6 = (3x - 2)(2x - 3);$$

$$x_{1,2} = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 144}}{12}; \quad \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ x = \frac{2}{3}; \end{cases}$$

$$2 - x - 3x^2 = -(3x - 2)(x + 1); \quad 3x^2 + x - 2 = 0;$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{6} = \frac{-1 \pm 5}{6}; \quad \begin{cases} x = -1 \\ x = \frac{2}{3}. \end{cases}$$

$$\left(\frac{2+3x}{(2x-3)(x+1)} - \frac{5}{(3x-2)(2x-3)} - \frac{5x}{(3x-2)(x+1)} \right) \cdot \frac{x+1}{x-9} + \frac{0,2}{3x-2} \geq 0;$$

$$\frac{(2+3x)(3x-2) - 5(x+1) - 5x(2x-3)}{(x+1)(2x-3)(3x-2)} \cdot \frac{x+1}{x-9} + \frac{0,2}{3x-2} \geq 0;$$

$$\frac{(9x^2 - 4 - 5x - 5 - 10x^2 + 15x)(x+1)}{(x+1)(2x-3)(3x-2)(x-9)} + \frac{0,2}{3x-2} \geq 0;$$

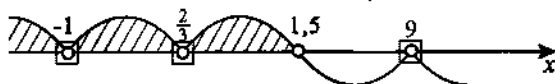
$$\frac{-x^2 + 10x - 9}{(x+1)(2x-3)(3x-2)} \cdot \frac{x+1}{x-9} + \frac{0,2}{3x-2} \geq 0;$$

$$\frac{-(x-1)(x-9)(x+1)}{(x+1)(2x-3)(3x-2)(x-9)} + \frac{0,2}{3x-2} \geq 0;$$

$$\begin{cases} \frac{(1-x)}{(2x-3)(3x-2)} + \frac{0,2}{3x-2} \geq 0, \\ x \neq -1, \\ x \neq 9; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1-x+0,2(2x-3)}{(2x-3)(3x-2)} \geq 0, \\ x \neq -1, \\ x \neq 9; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{-0,2(3x-2)}{(2x-3)(3x-2)} \geq 0, \\ x \neq -1, \\ x \neq 9; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{-0,2}{2x-3} \geq 0, \\ x \neq -1, \\ x \neq 9, \\ x \neq \frac{2}{3}; \end{cases} \quad \begin{cases} x < 1,5, \\ x \neq -1, \\ x \neq 9, \\ x \neq \frac{2}{3}. \end{cases}$$

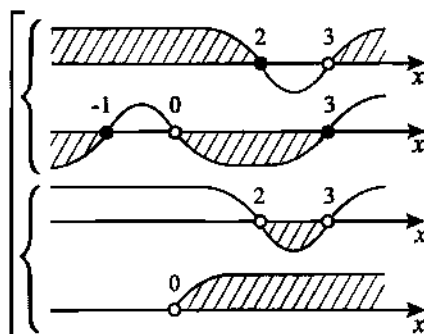


$$\text{Ответ: } (-\infty; -1) \cup \left(-1; \frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{3}; 1,5\right).$$

$$3. \frac{|x^2 - 5x + 6|}{x-3} \leq \frac{3}{x}.$$

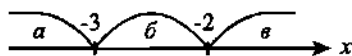
$$\left[\begin{cases} x^2 - 5x + 6 \geq 0, \\ \frac{x^2 - 5x + 6}{x-3} \leq \frac{3}{x} \\ x^2 - 5x + 6 < 0, \\ \frac{-(x^2 - 5x + 6)}{x-3} \leq \frac{3}{x}; \end{cases} \right. \quad \left[\begin{cases} (x-3)(x-2) \geq 0, \\ x-2 \leq \frac{3}{x}, \\ x \neq 3 \\ (x-3)(x-2) < 0, \\ 2-x \leq \frac{3}{x}; \end{cases} \right.$$

$$\left[\begin{cases} x \neq 3, \\ (x-3)(x-2) \geq 0, \\ \frac{x^2 - 2x - 3}{x} \leq 0 \\ (x-3)(x-2) < 0, \\ \frac{x^2 - 2x + 3}{x} \geq 0; \end{cases} \right. \quad \left[\begin{cases} x \neq 3, \\ (x-3)(x-2) \geq 0, \\ \frac{(x-3)(x+1)}{x} \leq 0 \\ (x-3)(x-2) < 0, \\ \frac{1}{x} \geq 0. \end{cases} \right.$$



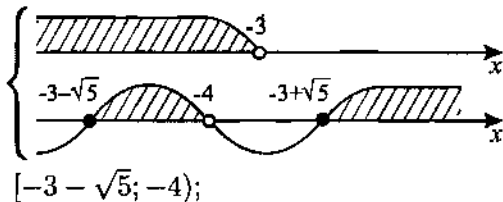
Ответ: $(-\infty; -1] \cup (0; 3)$.

4. $\frac{4}{|x+3|-1} \geq |x+2|.$



а)
$$\begin{cases} x < -3, \\ \frac{4}{-x-3-1} \geq -x-2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < -3, \\ \frac{-4 + (x+2)(x+4)}{x+4} \geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x < -3, \\ \frac{x^2 + 6x + 4}{x+4} \geq 0; \end{cases}$$



б)
$$\begin{cases} x \geq -3, \\ x < -2, \\ \frac{4}{x+3-1} \geq -x-2; \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq -3, \\ x < -2, \\ \frac{4 + (x+2)^2}{x+2} \geq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -3, \\ x < -2, \\ x > -2; \end{cases} \text{ нет решений;}$$

$$\begin{aligned}
 \text{в)} \quad & \begin{cases} x \geq -2, \\ \frac{4}{x+3-1} \geq x+2; \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq -2, \\ \frac{4-(x+2)^2}{x+2} \geq 0; \end{cases} \\
 & \begin{cases} x \geq -2, \\ \frac{-x(x+4)}{x+2} \geq 0. \end{cases}
 \end{aligned}$$

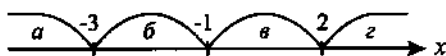
Ответ: $[-3 - \sqrt{5}; -4) \cup (-2; 0]$.

5. $|1 - |x + 2|| < 3 - x$.

$$\begin{aligned}
 & \begin{cases} 1 - |x + 2| < 3 - x, \\ 1 - |x + 2| > x - 3; \end{cases} \quad \begin{cases} |x + 2| > x - 2, \\ |x + 2| < 4 - x; \end{cases} \\
 & \begin{cases} \begin{cases} x + 2 > x - 2 \\ x + 2 < 2 - x, \end{cases} \\ x + 2 < 4 - x, \\ x + 2 > x - 4; \end{cases} \quad \begin{cases} \begin{cases} 2 > -2 \\ x < 0, \end{cases} \\ x < 1, \\ 2 > -4. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Ответ: $(-\infty; 1)$.

6. $|x + 1| + |x - 2| - |x + 3| > 4$.



а) $\begin{cases} x < -3, \\ -x - 1 - x + 2 + x + 3 > 4; \end{cases} \quad \begin{cases} x < -3, \\ x < 0; \end{cases} \quad (-\infty; -3);$

б) $\begin{cases} x \geq -3, \\ x < -1, \\ -x - 1 + 2 - x - x - 3 > 4; \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq -3, \\ x < -1, \\ x < -2; \end{cases} \quad [-3; -2);$

в) $\begin{cases} x \geq -1, \\ x < 2, \\ x + 1 + 2 - x - x - 3 > 4; \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq -1, \\ x < 2, \\ x < -4; \end{cases}$

нет решений;

г) $\begin{cases} x \geq 2, \\ x + 1 + x - 2 - x - 3 > 4; \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 2, \\ x > 8; \end{cases} \quad (8; +\infty).$

Ответ: $(-\infty; -2) \cup (8; +\infty)$.

Решение зачетной карточки 7

$$1. A(x, c) = \frac{2c + 3x + 6}{2x^2 + x(8 - c) + 8 - 2c - 3c^2} -$$

$$- \frac{5c}{6x^2 + x(24 - 13c) + 24 - 26c + 6c^2} +$$

$$+ \frac{5(x + 2)}{2c^2 - x(c + 12) - 12 - 2c - 3x^2}.$$

$$A(x, c) \cdot \frac{x + c + 2}{x - 9c + 2} + \frac{0,2}{3x - 2c + 6} \leq 0.$$

$$a) \quad 2x^2 + x(8 - c) + 8 - 2c - 3c^2 =$$

$$= 2(x^2 + 4x + 4) - c(x + 2) - 3c^2 =$$

$$= 2(x + 2)^2 - c(x + 2) - 3c^2.$$

Пусть $x + 2 = t$.

$$2t^2 - ct - 3c^2 = (2t - 3c)(t + c) = (2x + 4 - 3c)(x + 2 + c);$$

$$2t^2 - ct - 3c^2 = 0;$$

$$t_{1,2} = \frac{c \pm \sqrt{c^2 + 24c^2}}{4} = \frac{c \pm 5c}{4}; \quad \begin{cases} t = \frac{3}{2}c \\ t = -c. \end{cases}$$

$$б) \quad 6x^2 + x(24 - 13c) + 24 - 26c + 6c^2 =$$

$$= 6(x^2 + 4x + 4) - 13c(x + 2) + 6c^2 =$$

$$= 6(x + 2)^2 - 13c(x + 2) + 6c^2.$$

Пусть $x + 2 = t$. Тогда $6t^2 - 13ct + 6c^2 = (3t - 2c)(2t - 3c) =$

$$= (3(x + 2) - 2c) \cdot (2(x + 2) - 3c) =$$

$$= (3x + 6 - 2c)(2x + 4 - 3c).$$

$$t_{1,2} = \frac{13c \pm 5c}{12}; \quad \begin{cases} t = \frac{3}{2}c \\ t = \frac{2}{3}c. \end{cases}$$

$$в) \quad 2c^2 - x(c + 12) - 12 - 2c - 3x^2 = 2c^2 - c(x + 2) - 3(x + 2)^2.$$

Пусть $x + 2 = t$.

$$2c^2 - ct - 3t^2 = (2c - 3t)(c + t) = (2c - 3x - 6)(c + x + 2);$$

$$c_{1,2} = \frac{t \pm 5t}{4}; \quad \begin{cases} c = \frac{3}{2}t \\ c = -t. \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{2c+3x+6}{(2x-3c+4)(x+c+2)} - \frac{5c}{(3x-2c+6)(2x-3c+4)} - \\
& - \frac{5x+10}{(3x-2c+6)(x+c+2)} = \\
& = \frac{(2c+3x+6)(3x-2c+6) - 5c(x+c+2) - (5x+10)(2x-3c+4)}{(2x-3c+4)(x+c+2)(3x-2c+6)}, \\
& (2c+3x+6)(3x-2c+6) - 5c(x+c+2) - (5x+10)(2x-3c+4) = \\
& = 6cx + 9x^2 + 18x - 4c^2 - 6cx - 12c + 12c + 18x + 36 - 5cx - \\
& - 5c^2 - 10c - 10x^2 + 15cx - 20x - 20x + 30c - 40; \\
& -x^2 + 10cx - 4x + 20c - 4 - 9c^2 \\
A(x, c) &= \frac{-x^2 + 10cx - 4x + 20c - 4 - 9c^2}{(2x - 3c + 4)(x + c + 2)(3x - 2c + 6)}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Значит, } A(x, c) \cdot \frac{x+c+2}{x-9c+2} + \frac{0,2}{3x-2c+6} &\leq 0 \Leftrightarrow \\
\frac{-x^2+10cx-4x+20c-4-9c^2}{(2x-3c+4)(x+c+2)(3x-2c+6)} \cdot \frac{x+c+2}{x-9c+2} + \frac{0,2}{3x-2c+6} &\leq 0; \\
-x^2+10cx-4x+20c-4-9c^2 &= -((x+2)^2 - 10c(x+2) + 9c^2).
\end{aligned}$$

Пусть $x+2=t$.

$$\begin{aligned}
t^2 - 10ct + 9c^2 &= (t-9c)(t-c) = (x-9c+2)(x-c+2). \\
& - (x-9c+2)(x-c+2)(x+c+2) \\
& \frac{0,2}{(2x-3c+4)(x+c+2)(3x-2c+6)(x-9c+2)} + \frac{0,2}{3x-2c+6} \leq 0; \\
& \frac{-x+c-2}{(2x-3c+4)(3x-2c+6)} + \frac{0,2}{3x-2c+6} \leq 0; \\
& \frac{-x+c-2+0,2(2x-3c+4)}{(2x-3c+4)(3x-2c+6)} \leq 0; \\
& \frac{-0,6x+0,4c-1,2}{(2x-3c+4)(3x-2c+6)} \leq 0; \\
& \frac{-0,2(3x-2c+6)}{(2x-3c+4)(3x-2c+6)} \leq 0; \quad \frac{-0,2}{2x-3c+4} \leq 0.
\end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } \begin{cases} x > \frac{1}{2}(3c-4), \\ x \neq \frac{1}{3}(2c-6), \\ x \neq -c-2, \\ x \neq 9c-2. \end{cases}$$

$$2. (x+2)(x+3)(x+8)(x+12) \leq 4x^2.$$

$$(x^2 + 14x + 24)(x^2 + 11x + 24) \leq 4x^2; \quad (: x^2)$$

($x = 0$ не является решением)

$$\frac{x^2 + 14x + 24}{x} \cdot \frac{x^2 + 11x + 24}{x} \leq 4;$$

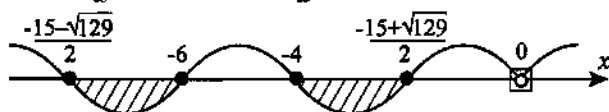
$$\left(x + 14 + \frac{24}{x}\right) \left(x + 11 + \frac{24}{x}\right) \leq 4.$$

$$\text{Пусть } x + \frac{24}{x} = t. \quad (t+14)(t+11) \leq 4; \quad t^2 + 25t + 150 \leq 0;$$

$$\begin{cases} t = -10 \\ t = -15; \end{cases} \quad (t+10)(t+15) \leq 0.$$

$$\left(x + 10 + \frac{24}{x}\right) \left(x + 15 + \frac{24}{x}\right) \leq 0;$$

$$\frac{x^2 + 10x + 24}{x} \cdot \frac{x^2 + 15x + 24}{x} \leq 0.$$



$$\text{Ответ: } \left[\frac{-15 - \sqrt{129}}{2}; -6 \right] \cup \left[-4; \frac{-15 + \sqrt{129}}{2} \right].$$

$$3. |x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6| \leq |x^3 + 2x^2 - 5x - 6|.$$

Используя теорему Безу и учитывая тот факт, что $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$ являются делителями числа 6, разложим на множители левую и правую части неравенства.

$$|(x^2 + 2x - 3)(x^2 - x - 2)| \leq |(x+1)(x^2 + x - 6)|.$$

$$|(x+3)(x-1)(x+1)(x-2)| \leq |(x+1)(x+3)(x-2)|;$$

$$|(x+3)(x+1)(x-2)|(|x-1| - 1) \leq 0;$$

$$\begin{cases} x = -3 \\ x = -1, \\ x = 2, \\ \begin{cases} x - 1 \leq 1, \\ x - 1 \geq -1; \end{cases} \end{cases} \quad \begin{cases} x = -3 \\ x = -1, \\ x = 2, \\ \begin{cases} x \leq 2, \\ x \geq 0. \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } [0; 2] \cup \{-1; -3\}.$$

$$4. |x^2 - 5|x| + 4| \geq |2x^2 - 3|x| + 1|.$$

$$|(|x| - 1)(|x| - 4)| \geq |(|x| - 1)(2|x| - 1)|;$$

$$\begin{cases} |x| = 1 \\ ||x| - 4| \geq |2|x| - 1|; \end{cases} \quad ||x| - 1| \cdot (||x| - 4| - |2|x| - 1|) \geq 0;$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ x = -1, \\ |x| - 4 \geq |2|x| - 1|, \\ |x| - 4 \leq -|2|x| - 1|; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1 \\ x = -1, \\ \begin{cases} 2|x| - 1 \leq |x| - 4, \\ 2|x| - 1 \geq 4 - |x| \end{cases} \\ \begin{cases} 2|x| - 1 \leq 4 - |x|, \\ 2|x| - 1 \geq |x| - 4; \end{cases} \end{cases}$$

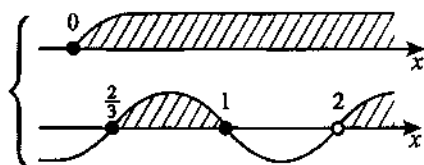
$$\begin{cases} x = 1 \\ x = -1, \\ \begin{cases} |x| \leq -3, \\ |x| \geq \frac{5}{3} \end{cases} \\ \begin{cases} |x| \leq \frac{5}{3}, \\ |x| \geq -3; \end{cases} \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1 \\ x = -1, \\ \begin{cases} x \leq 1\frac{2}{3}, \\ x \geq -1\frac{2}{3}. \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } \left[-1\frac{2}{3}; 1\frac{2}{3}\right].$$

$$5. \frac{(1+x)(x+2)}{x^2 - |x| - 2} \geq -3x.$$

$$\begin{cases} \begin{cases} x \geq 0, \\ \frac{(1+x)(x+2)}{x^2 - x - 2} \geq -3x \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0, \\ \frac{(1+x)(x+2)}{x^2 + x - 2} \geq -3x; \end{cases} \end{cases} \quad \begin{cases} \begin{cases} x \geq 0, \\ \frac{x+2}{x-2} \geq -3x \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0, \\ \frac{x+1}{x-1} \geq -3x, \\ x \neq -2; \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{cases} x \geq 0, \\ \frac{3x^2 - 5x + 2}{x - 2} \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0, \\ x \neq -2, \\ \frac{3x^2 - 2x + 1}{x - 1} \geq 0; \end{cases} \end{cases} \quad \begin{cases} \begin{cases} x \geq 0, \\ \frac{(3x-2)(x-1)}{x-2} \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0, \\ x \neq -2, \\ x - 1 > 0. \end{cases} \end{cases}$$



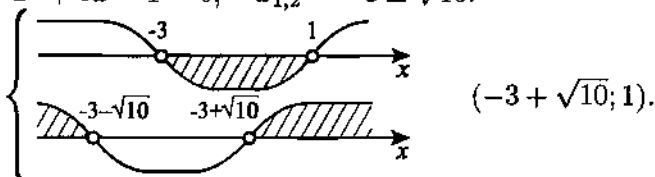
Ответ: $\left[\frac{2}{3}; 1\right] \cup (2; +\infty)$.

6. $|x^2 + 4x - 2| < 2x + 1$.

$$\begin{cases} x^2 + 4x - 2 < 2x + 1, \\ x^2 + 4x - 2 > -2x - 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + 2x - 3 < 0, \\ x^2 + 6x - 1 > 0. \end{cases}$$

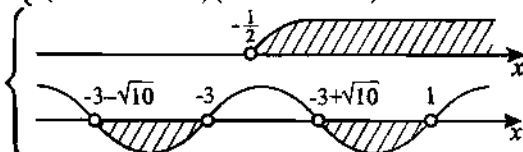
$$x^2 + 2x - 3 = 0; \quad \begin{cases} x = -3 \\ x = 1; \end{cases}$$

$$x^2 + 6x - 1 = 0; \quad x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{10}.$$



Другой способ: $|x^2 + 4x - 2| < 2x + 1 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} 2x + 1 > 0, \\ (x^2 + 4x - 2)^2 < (2x + 1)^2; \\ x > -\frac{1}{2}, \\ (x^2 + 4x - 2)^2 - (2x + 1)^2 < 0; \\ x > -\frac{1}{2}, \\ (x^2 + 4x - 2 + 2x + 1)(x^2 + 4x - 2 - 2x - 1) < 0; \\ x > -\frac{1}{2}, \\ (x^2 + 6x - 1)(x^2 + 2x - 3) < 0. \end{cases}$$



Ответ: $(-3 + \sqrt{10}; 1)$.

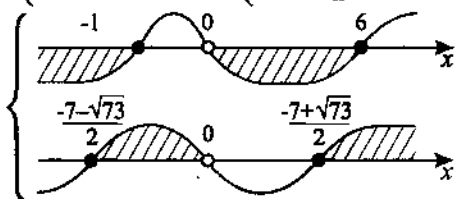
Решение зачетной карточки 8

$$1. \left(x - \frac{6}{x}\right)^2 + 2\left(x - \frac{6}{x}\right) - 35 \leq 0.$$

Пусть $x - \frac{6}{x} = t$. Тогда $t^2 + 2t - 35 \leq 0$; $(t+7)(t-5) \leq 0$.



$$\begin{cases} x - \frac{6}{x} \leq 5, \\ x - \frac{6}{x} \geq -7; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{x^2 - 5x - 6}{x} \leq 0, \\ \frac{x^2 + 7x - 6}{x} \geq 0. \end{cases}$$



Ответ: $\left[\frac{-7-\sqrt{73}}{2}; -1\right] \cup \left[\frac{-7+\sqrt{73}}{2}; 6\right]$.

$$2. \left(\frac{2+5x}{24+34x-3x^2} - \frac{2+3x}{24+58x-5x^2}\right) : \frac{4x+2}{4+16x+15x^2} \leq \frac{48}{12-x}.$$

$$24 + 34x - 3x^2 = -(3x+2)(x-12);$$

$$24 + 58x - 5x^2 = -(5x+2)(x-12);$$

$$15x^2 + 16x + 4 = (5x+2)(3x+2);$$

$$\left(\frac{2+3x}{(5x+2)(x-12)} - \frac{2+5x}{(3x+2)(x-12)}\right) \frac{(5x+2)(3x+2)}{2(2x+1)} + \frac{48}{x-12} \leq 0;$$

$$\frac{(3x+2)^2 - (2+5x)^2}{(5x+2)(x-12)(3x+2)} \cdot \frac{(5x+2)(3x+2)}{2(2x+1)} + \frac{48}{x-12} \leq 0;$$

$$\frac{(3x+2+2+5x)(3x+2-2-5x)(5x+2)(3x+2)}{2(5x+2)(3x+2)(x-12)(2x+1)} + \frac{48}{x-12} \leq 0;$$

$$\frac{-8x(2x+1)}{2(x-12)(2x+1)} + \frac{48}{x-12} \leq 0;$$

$$\frac{48}{x-12} - \frac{4x}{x-12} \leq 0; \quad \frac{-4(x-12)}{x-12} \leq 0; \quad -4 \leq 0.$$

$$\begin{cases} x \neq 12, \\ x \neq -\frac{1}{2}, \\ x \neq -\frac{2}{3}, \\ x \neq -\frac{2}{5}. \end{cases}$$

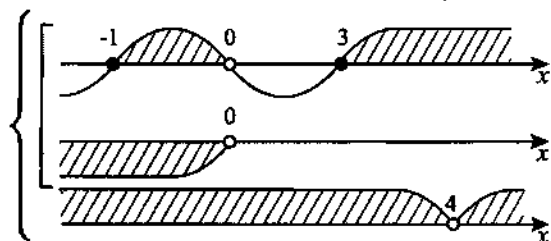
$$\text{Ответ: } \left(-\infty; -\frac{2}{3}\right) \cup \left(-\frac{2}{3}; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}; -\frac{2}{5}\right) \cup \left(-\frac{2}{5}; 12\right) \cup (12; +\infty).$$

$$3. \quad \left| \frac{x^2 - 6x + 8}{x - 4} \right| \geq \frac{3}{x}.$$

$$\begin{cases} |x - 2| \geq \frac{3}{x}, \\ x \neq 4; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{cases} x - 2 \geq \frac{3}{x} \\ x - 2 \leq -\frac{3}{x}, \end{cases} & \begin{cases} \frac{x^2 - 2x - 3}{x} \geq 0 \\ \frac{x^2 - 2x + 3}{x} \leq 0, \end{cases} \\ x \neq 4; \end{cases}$$

$$x^2 - 2x + 3 > 0 \text{ (при всех } x); \quad \begin{cases} \frac{(x-3)(x+1)}{x} \geq 0 \\ \frac{1}{x} \leq 0, \\ x \neq 4. \end{cases}$$



$$\text{Ответ: } (-\infty; 0) \cup [3; 4) \cup (4; +\infty).$$

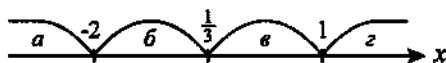
$$4. (x+6)^4 + 2x^2(x+6)^2 \leq 35x^4.$$

$$\left(\frac{x+6}{x}\right)^4 + 2\left(\frac{x+6}{x}\right)^2 - 35 \leq 0,$$

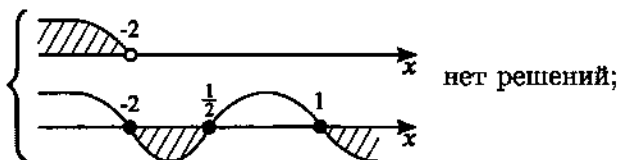
далее аналогично первому примеру.

$$\text{Ответ: } (-\infty; -1,5(\sqrt{5}-1)] \cup \left[\frac{3}{2}(\sqrt{5}+1); +\infty\right).$$

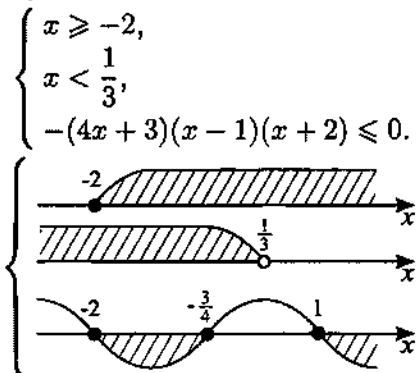
$$5. (|1-3x| - |x+2| - 2)(x^2 - x - 2|x-1|) \leq 0.$$



$$\text{а) } \begin{cases} x < -2, \\ (1-3x+x+2-2)(x^2-x+2(x-1)) \leq 0; \\ x < -2, \\ (1-2x)(x-1)(x+2) \leq 0; \end{cases}$$



$$\text{б) } \begin{cases} x \geq -2, \\ x < \frac{1}{3}, \\ (1-3x-x-2-2)(x^2-x+2(x-1)) \leq 0; \end{cases}$$



$$\left[-2; -\frac{3}{4}\right];$$

$$\begin{aligned}
 \text{в)} \quad & \begin{cases} x \geq \frac{1}{3}, \\ x < 1, \\ (3x - 1 - x - 2 - 2)(x^2 - x + 2(x - 1)) \leq 0; \end{cases} \\
 & \begin{cases} x \geq \frac{1}{3}, \\ x < 1, \\ (2x - 5)(x - 1)(x + 2) \leq 0; \end{cases} \\
 & \left\{ \begin{array}{l} \text{График 1: } x \geq \frac{1}{3} \text{ (затенено)} \\ \text{График 2: } x < 1 \text{ (затенено)} \\ \text{График 3: } (2x - 5)(x - 1)(x + 2) \leq 0 \text{ (затенено на } [-2, 1] \cup [2.5, \infty)) \end{array} \right. \quad \text{нет решений;}
 \end{aligned}$$

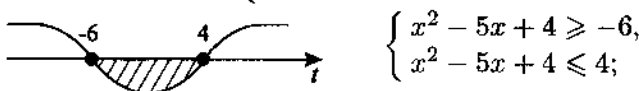
$$\begin{aligned}
 \text{г)} \quad & \begin{cases} x \geq 1, \\ (3x - 1 - x - 2 - 2)(x^2 - x - 2(x - 1)) \leq 0; \end{cases} \\
 & \begin{cases} x \geq 1, \\ (2x - 5)(x - 1)(x - 2) \leq 0; \end{cases} \\
 & \left\{ \begin{array}{l} \text{График 1: } x \geq 1 \text{ (затенено)} \\ \text{График 2: } (2x - 5)(x - 1)(x - 2) \leq 0 \text{ (затенено на } [1, 2] \cup [2.5, \infty)) \end{array} \right. \quad [2; 2.5] \cup \{1\}.
 \end{aligned}$$

Ответ: $\left[-2; -\frac{3}{4}\right] \cup \{1\} \cup [2; 2.5]$.

6. $|(x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4)| \leq 24$.

Пусть $x^2 - 5x + 4 = t$; $|(x^2 - 5x + 4)(x^2 - 5x + 6)| \leq 24$;

$$|t(t + 2)| \leq 24; \quad \begin{cases} t^2 + 2t - 24 \leq 0, \\ t^2 + 2t + 24 \geq 0; \end{cases} \quad (t + 6)(t - 4) \leq 0.$$



$$\begin{cases} x^2 - 5x + 10 \geq 0, \\ x^2 - 5x \leq 0. \end{cases}$$



Ответ: $[0; 5]$.

Ответы на самостоятельные работы

Самостоятельная работа 1

Вариант 1

1. $(-\infty; -1) \cup [2; 3) \cup [5; \infty)$; 2. $[-5; -4) \cup (2; 3]$;
3. $(-1, 5; 0, 6) \cup (1; \infty)$; 4. $(-\infty; -2) \cup (6; \infty) \cup \{4\}$;
5. $(-\infty; -6] \cup [0; 1)$; 6. $[-3; -2] \cup (-1; 0) \cup (1; 2]$;
7. $[0; 2] \cup (3; \infty)$; 8. $[-9; -2) \cup (-2; 3]$;
9. $(-\infty; -5] \cup (-2; 1]$; 10. $[0; 1) \cup (3; 4]$.

Вариант 2

1. $(-\infty; -5] \cup (-3; -2] \cup (1; \infty)$; 2. $[-3; -2) \cup (4; 5]$;
3. $(-\infty; -1) \cup (-0, 6; 1, 5)$; 4. $(-\infty; -6) \cup (2; \infty) \cup \{-4\}$;
5. $(-1; 0] \cup [6; \infty)$; 6. $[-2; -1) \cup (0; 1) \cup [2; 3]$;
7. $(-\infty; -3) \cup [-2; 0]$; 8. $(-3; 2) \cup (2; 9]$;
9. $[-1; 2) \cup [5; \infty)$; 10. $[-4; -3) \cup (-1; 0]$.

Самостоятельная работа 2

Вариант 1

1. $(-6; 7)$; 2. $[-3; -1) \cup (0; 1) \cup \{2\}$; 3. $(-\infty; 1) \cup (1; 2)$;
4. $(-\infty; -2] \cup (0; 2) \cup [4; \infty)$; 5. $(-\infty; -1) \cup [0; 3] \cup (4; \infty)$;
6. $(-4; -3) \cup [-2, 5; \infty)$; 7. $[-8; -2) \cup (-2; 0]$;
8. $(-\infty; -2) \cup \left[-\frac{2}{11}; 2\right)$; 9. $(-2; -1) \cup [1, 5; 2)$;
10. $(-\infty; -2] \cup (0; 1) \cup [3; \infty)$.

Вариант 2

1. $(-7; 6)$; 2. $(-1; 0) \cup (1; 3] \cup \{-2\}$;
3. $(-2; -1) \cup (-1; \infty)$; 4. $(-\infty; -4] \cup (-2; 0) \cup [2; \infty)$;
5. $(-\infty; -4) \cup [-3; 0] \cup (1; \infty)$; 6. $(-\infty; 2, 5] \cup (3; 4)$;
7. $[0; 2) \cup (2; 8]$; 8. $\left(-2; \frac{2}{11}\right] \cup (2; \infty)$;
9. $(-2; -1, 5] \cup (1; 2)$; 10. $(-\infty; -3] \cup (-1; 0) \cup [2; \infty)$.

*Самостоятельная работа 3***Вариант 1**

1. $(3; 5)$; 2. $(-\infty; \infty)$; 3. $(-\infty; -4] \cup [1; \infty)$;
4. $\{-7; 1\}$; 5. $[-0, 6; 5]$; 6. $[-3; -2] \cup (-2; 1) \cup (1; \infty)$;
7. $(2; 3) \cup \{-3; 4\}$; 8. $(2; 3]$; 9. $\{-1\}$;
10. $[-1; 0) \cup (0; 0, 5) \cup (0, 5; 1, 5]$.

Вариант 2

1. $(-5; -3)$; 2. $(-\infty; \infty)$; 3. $(-\infty; -1] \cup [4; \infty)$;
4. $\{-1; 7\}$; 5. $[-5; 0, 6]$; 6. $(-\infty; -1) \cup (-1; 2) \cup (2; 3]$;
7. $(-3; -2) \cup \{-4; 3\}$; 8. $[-3; -2)$; 9. $\{1\}$;
10. $[-1, 5; -0, 5) \cup (-0, 5; 0) \cup (0; 1]$.

*Самостоятельная работа 4***Вариант 1**

1. $(-\infty; -2) \cup \left(-\sqrt{2}; 1\frac{1}{3}\right) \cup (3; \infty)$; 2. $\left[-\frac{1}{4}; 1\right]$;
3. $(-\infty; -2] \cup \left[1\frac{2}{3}; \infty\right)$; 4. $(-\infty; -3] \cup (-2; 1) \cup [5; \infty)$;
5. $(-2; -1] \cup [2; \infty)$; 6. $\left(-5; -1\frac{7}{8}\right) \cup (5; \infty)$;
7. $(-\infty; -3) \cup [1; 1, 5) \cup \{0, 5\}$; 8. $(-1; 0] \cup [3; 4) \cup \{5\}$;
9. $(-\infty; -4) \cup (3; \infty) \cup \{-3\}$;
10. $(-\infty; -1) \cup \left[\frac{1}{3}; 1\right) \cup (1; \infty)$.

Вариант 2

1. $(-\infty; -3) \cup \left(-1\frac{1}{3}; \sqrt{2}\right) \cup (2; \infty)$; 2. $\left[-1; \frac{1}{4}\right]$;
3. $\left(-\infty; -1\frac{2}{3}\right] \cup [2; \infty)$; 4. $(-\infty; -5] \cup (-1; 2) \cup [3; \infty)$;
5. $(-\infty; -2] \cup [1; 2)$; 6. $(-\infty; -5) \cup \left(1\frac{7}{8}; 5\right)$;
7. $(-\infty; -2) \cup \left[\frac{1}{2}; 2, 5\right) \cup \left\{\frac{1}{3}\right\}$; 8. $(-4; -3] \cup [0; 1) \cup \{-5\}$;
9. $(-\infty; -3) \cup (4; \infty) \cup \{3\}$;
10. $(-\infty; -1) \cup \left(-1; -\frac{1}{3}\right] \cup (1; \infty)$.

Самостоятельная работа 5

Вариант 1

1. $(-\infty; -4) \cup (\sqrt{3}; 1,75) \cup (2; \infty)$; 2. $[-2; 2]$;
3. $(-2,5; -2] \cup \left[2; 2\frac{1}{3}\right)$; 4. $(-1; 6)$; 5. $(-2; 2)$;
6. $(-\infty; -3) \cup (-3; -2] \cup \left[-\frac{1}{4}; 2\right] \cup \left\{-\frac{1}{3}\right\}$;
7. $(-\infty; 1] \cup (1,5; \infty)$;
8. $(-\infty; -3) \cup [0; 2) \cup [12; \infty)$; 9. $(-\infty; -1) \cup (6; \infty) \cup \{0; 4\}$;
10. $(-\infty; -2] \cup [1; 2) \cup (2; 3) \cup (6; \infty)$.

Вариант 2

1. $(-\infty; -3) \cup (\sqrt{6}; 2,5) \cup (4; \infty)$; 2. $[-3; 3]$;
3. $\left[-2\frac{1}{3}; -2\right) \cup [2; 2,5)$; 4. $(-6; 1)$; 5. $(-1; 0) \cup (0; 1)$;
6. $(-\infty; -4) \cup (-4; -3] \cup \left[\frac{1}{3}; 3\right] \cup \left\{\frac{1}{4}\right\}$;
7. $(-\infty; -1,5) \cup [-1; \infty)$;
8. $[-12; -2) \cup [0; 3)$; 9. $(-\infty; -6) \cup (1; \infty) \cup \{-4; 0\}$;
10. $(-\infty; -6) \cup (-3; -2) \cup [-2; -1] \cup (2; \infty)$.

Самостоятельная работа 6

Вариант 1

1. $(-5; 0] \cup [3; 8)$; 2. $(-\infty; 1) \cup \left(1; 1\frac{2}{3}\right) \cup [2; 3]$;
3. $(-\infty; -\sqrt{1,5}) \cup (1; \sqrt{1,5})$;
4. $(-\infty; -2,5] \cup (-1,5; -1,25) \cup (-1,25; -1]$;
5. $(-\infty; -1) \cup (-1; 1] \cup (2,5; \infty)$; 6. $(-\infty; -6] \cup [6; \infty)$;
7. $(-\infty; -1]$; 8. $(-4; 0) \cup (0; 1) \cup (1; 4)$;
9. $(-4; -1,5) \cup [-0,25; 0,25] \cup (1,5; 4)$;
10. $[-6; -3] \cup [-2; 2] \cup [3; 6]$.

Вариант 2

1. $(-\infty; -1) \cup [0; 4] \cup (5; \infty)$;
2. $[-3; 2] \cup \left(-1\frac{2}{3}; -1\right) \cup (-1; \infty)$;
3. $(-\infty; -2) \cup \left(-2; -\frac{2}{3}\sqrt{3}\right) \cup \left(1; \frac{2}{3}\sqrt{3}\right)$;
4. $[1; 1, 25) \cup (1, 25; 1, 5) \cup [2, 5; \infty)$;
5. $(-\infty; -2, 5) \cup [-1; 1) \cup (1; \infty)$;
6. $(-\infty; -5] \cup [5; \infty)$; 7. $[-\infty; -2)$;
8. $(-3; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; 3)$;
9. $\left(-3; -1\frac{1}{3}\right) \cup \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right] \cup \left(1\frac{1}{3}; 3\right)$;
10. $[-2 - \sqrt{7}; -3] \cup [-1; 1] \cup [3; 2 + \sqrt{7}]$.

*Самостоятельная работа 7***Вариант 1**

1. $(-\infty; -1] \cup [1; 2) \cup (3; \infty)$;
2. $[-2; -1) \cup \left(-\frac{11}{19}; \frac{1}{3}\right) \cup \left[\frac{1}{2}; 2\frac{1}{2}\right)$;
3. $(-\infty; -1] \cup \left(-\frac{1}{2}; 0\right) \cup [1; 2]$;
4. $\left[-1; -\frac{4}{5}\right) \cup \left(-\frac{4}{5}; -\frac{1}{2}\right) \cup \left[-\frac{1}{6}; \infty\right)$;
5. $(-\infty; -1) \cup \left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right) \cup \left[\frac{5}{13}; 1\right) \cup (2; \infty)$;
6. $\left(-\infty; -2\frac{2}{3}\right] \cup [0; 1, 5]$;
7. $(-\infty; -2] \cup \left(\frac{1}{2}; 2\right) \cup (2; \infty)$;
8. $[-5; -2) \cup \left[\frac{1}{3}; 3\right)$;
9. $[0; 2) \cup (4; 3 + \sqrt{5}]$;
10. $(-\infty; -1) \cup (-1; 1] \cup [3; 5) \cup (5; \infty)$.

Вариант 2

1. $(-\infty; -3) \cup (-2; -1] \cup [1; \infty)$;
2. $\left(-2\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right] \cup \left(-\frac{1}{3}; \frac{11}{13}\right] \cup (1; 2)$;
3. $[-2; -1] \cup \left(0; \frac{1}{2}\right) \cup [1; \infty)$;
4. $\left(\infty; \frac{1}{6}\right] \cup \left(\frac{1}{2}; \frac{4}{5}\right) \cup \left(\frac{4}{5}; 1\right]$;
5. $(-\infty; -2) \cup \left(-1; -\frac{5}{13}\right] \cup \left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right) \cup (1; \infty)$;
6. $[-2; 0] \cup [2; 5; \infty)$;
7. $(-\infty; -2) \cup \left[-1; -\frac{1}{2}\right] \cup (2; \infty)$;
8. $\left(-3; -\frac{1}{3}\right] \cup (2; 5]$;
9. $[-(3 + \sqrt{5}); -4) \cup (-2; 0]$;
10. $(-\infty; -5) \cup (-5; -3] \cup [-1; 1) \cup (1; \infty)$.

Самостоятельная работа 8

Вариант 1

1. $\left(-2\frac{1}{3}; -\sqrt{5}\right) \cup (\sqrt{5}; 3) \cup (3; \infty)$;
2. $(-3; 2)$;
3. $(-4; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; 2)$;
4. $(-7; -3] \cup [0; 1) \cup (1; 3] \cup \{4\}$;
5. $(-\infty; -2) \cup (2; \infty) \cup \{1\}$;
6. $[-2; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; 2]$;
7. $(-\infty; -1 - \sqrt{2}) \cup (-1; 0) \cup (0; 1) \cup (1; \infty)$;
8. $(-5; -3] \cup [-2; -1) \cup (0, 5; 1]$;
9. $[-2; 0) \cup (1; 3]$;
10. $(-\infty; -0, 5) \cup (0, 5; 1, 5] \cup \{0\}$.

Вариант 2

1. $(-\infty; -3) \cup (-3; -\sqrt{5}) \cup \left(\sqrt{5}; 2\frac{1}{3}\right)$;
2. $(-2; 3)$;
3. $(-1; -0, 5) \cup (-0, 5; 0, 5) \cup (1; 2)$;
4. $[-3; -1) \cup (-1; 0] \cup [3; 7) \cup \{-4\}$;
5. $(-\infty; -2) \cup (2; \infty) \cup \{-1\}$;
6. $[-1; -0, 5) \cup (-0, 5; 0, 5) \cup (0, 5; 1]$;
7. $(-\infty; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; 1) \cup (1 + \sqrt{2}; \infty)$;
8. $[-1; -0, 5) \cup (1; 2] \cup [3; 5)$;
9. $[-3; -1) \cup (0; 2]$;
10. $\left(-\infty; -\frac{3}{2}\right] \cup \left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}\right) \cup \left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right)$.

*Самостоятельная работа 9***Вариант 1**

1. $[-1, 5; 2]$; 2. $\emptyset$ 3. $[-9; 0] \cup \{2\}$;
4. $\left[-3\frac{1}{21}; -3\right) \cup (5; \infty)$; 5. $(-2; -1, 4] \cup (1; 3]$; 6. $x = 1$;
7. $(0; 1] \cup [1, 5; 2]$; 8. $(-1; 0] \cup (1; 3]$;
9. $(-1, 5; -1) \cup (0; 1, 5] \cup [2; 3) \cup (4; \infty)$; 10. $[-\sqrt{2}; -1)$.

Вариант 2

1. $[-2; 1, 5]$; 2. $\emptyset$; 3. $[0; 9] \cup \{-2\}$;
4. $(-\infty; -5) \cup \left(3; 3\frac{1}{21}\right]$; 5. $[-3; -1) \cup [1, 4; 2]$; 6. $\{-1\}$;
7. $(-2; -1, 5] \cup [-1; 0]$; 8. $[-3; -1) \cup [0; 1]$;
9. $(-\infty; -4) \cup (-3; -2] \cup [-1, 5; 0) \cup (1; 1, 5)$; 10. $(1; \sqrt{2}]$.

*Самостоятельная работа 10***Вариант 1**

1. $(-1; -0, 5) \cup (-0, 5; 0, 5] \cup [2; \infty)$;
2. $(-\infty; -2) \cup (-1; 0] \cup (1; 2)$; 3. $(-\infty; 1] \cup [2; 3] \cup [4; \infty)$;
4. $(0, 25; 8)$; 5. $(-0, 5; -0, 25) \cup (1; 1, 25)$; 6. $[-0, 5; 0, 5]$;
7. $[-3; 1]$; 8. $(-\infty; -1) \cup (1; 5]$;
9. $(-4; -3) \cup (-2, 5; -2) \cup (-1; 0)$; 10. $(-1; 2)$.

Вариант 2

1. $(-\infty; -2] \cup [-0, 5; 0, 5) \cup (0, 5; 1)$;
2. $(-2; -1) \cup [0; 1) \cup (2; \infty)$; 3. $(-\infty; -4] \cup [-3; -2] \cup [-1; \infty)$;
4. $(-8; -0, 25)$; 5. $(-1, 25; -1) \cup (0, 25; 0, 5)$;
6. $[-0, 25; 0, 25]$; 7. $[-1; 3]$; 8. $[-5; -1) \cup (1; \infty)$;
9. $[0; 1) \cup (2; 2, 5] \cup (3; 4)$; 10. $(-2; 1)$.

Содержание

Программа элективного курса	5
1. Решение неравенств методом интервалов	5
Обозначения	5
В чем заключается метод интервалов	6
Практикум 1	
(Примеры использования метода интервалов)	9
Тренировочная работа 1	21
Проверочная работа 1	26
Тренировочная работа 2	27
Проверочная работа 2	31
Системы неравенств	32
Практикум 2	32
Тренировочная работа 3	39
Нахождение области определения	46
Практикум 3	46
Тренировочная работа 4	49
Решение более сложных неравенств	53
Тренировочная работа 5	53
Проверочная работа 3	60
2. Модульные неравенства	61
Свойства модульных неравенств	61
Практикум 4	64
Тренировочная работа 6	75
Тренировочная работа 7	
(Нахождение области определения)	83
Проверочная работа 4	92
Проверочная работа 5	93
3. Карточки заданий	94
Подготовительные карточки	94
Тренировочные карточки	122
Зачетные карточки	125
4. Самостоятельные работы	129
Самостоятельная работа 1	129
Самостоятельная работа 2	131
Самостоятельная работа 3	132
Самостоятельная работа 4	133
Самостоятельная работа 5	134
Самостоятельная работа 6	135
Самостоятельная работа 7	136
Самостоятельная работа 8	137
Самостоятельная работа 9	139
Самостоятельная работа 10	141

5. Решения и ответы.	143
Решение проверочной работы 1.	143
Решение проверочной работы 2.	147
Решение проверочной работы 3.	151
Решение проверочной работы 4.	156
Решение проверочной работы 5.	164
Решение тренировочных карточек	172
Решение зачетных карточек заданий	206
Ответы на самостоятельные работы	241

Учебное издание

Шахмейстер Александр Хаймович
ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

Научный редактор серии А. В. Семенов

Художник Ю.Н. Куликов

Компьютерная Верстка С.С. Афонин

Корректоры Е.Г. Никитина, И.Б. Смирнов, А.В. Смирнов

По вопросам приобретения просьба обращаться:

ИЗДАТЕЛЬСТВО МЦНМО

119002, Москва, Б. Власьевский пер., 11.

Тел.: (495) 241-7285; факс: (499) 795-1015.

E-mail: biblio@mcsme.ru; www.mcsme.ru

ИЗДАТЕЛЬСТВО «ВИКТОРИЯ ПЛЮС»

В Санкт-Петербурге: (812) 516-5811, (812) 516-5805,

В Москве (филиал): (495) 488-3005

E-mail: victory@mailbox.alkor.ru; www.victory.sp.ru

ИЗДАТЕЛЬСТВО «ПЕТРОГЛИФ»

193171, С.-Петербург, Фарфоровская 18, кв 1.

Тел.: (812) 560-0598; факс: (812) 560-0524.

E-mail: spb@petroglyph.ru; www.petroglyph.ru,

Подписано к печати 14.05.2008. Формат 60х90^{1/16}. Бумага офсетная.

Печать офсетная. Объем 15,5 печ. л. Тираж 3000 экз. Заказ 543.

Отпечатано с диапозитивов в ГП ПО «Псковская областная типография».

180004, г. Псков, ул. Ротная, 34